2017二模压轴题分析

David Li

2017年4月7日

1. (杨浦12)⋆⋆设函数$f_a(x)=|x|+|x-a|$.当a在实数范围内变化时，在圆盘$x^2+y^2\le 1$内，且不在任一$f_a(x)$的图像上的点的全体组成的图形的面积为____________

   分析：

   i 当a从零开始变大时，f_a的图像是一个碗，且碗的左边缘向上滑动，右边缘沿直线$y=x$向上滑动，求出碗底扫过的区域

   ii 再类似讨论a从零开始变小的情形

   iii 将两块区域抠掉，剩下的面积即为所求

   答案：$\frac{3\pi}{4}$

2. (杨浦16)⋆⋆对于定义在$\mathbb{R}$上的函数$f(x)$，若存在正实数a,b，使得$f(x+a)\le f(x)+b$对一切$x\in\mathbb{R}$均成立，则称$f(x)$是"控制增长函数".在以下四个函数中：

   (1) $f(x)=x^2+x+1$

   (2) $f(x)=\sqrt{|x|}$

   (3) $f(x)=\sin(x^2)$

   (4) $f(x)=x\cdot\sin x$

   是"控制增长函数"的有……………………………………………………………(　　)

   A. (2)(3)　　B. (3)(4)　　C. (2)(3)(4)　　D. (1)(2)(4)

   分析：

   i 一般每个函数对或不对，都不可能单独筛选出唯一答案，所以我们选C

   ii 我们从几何上去理解控制增长：存在间隔a，图像上任两横向距离为a的点，高度增加有上界，由此排除(1)，确定(2)

   iii 显然有界函数一定符合题意，确定(3)

   iv (4)是最麻烦的一个，注意有人会认为控制增长函数就是导函数有上界的函数，这是错误的，(4)就是反例.为了控制增长，我们要选取合适的a，注意到$\sin x$的周期性，我们取$a=2\pi$即可

   答案：C

3. (杨浦21)⋆⋆设双曲线Γ的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，过其右焦点且斜率不为零的直线l_1与双曲线交于A,B两点，直线l_2的方程为$x=t$，A,B在直线l_2上的射影分别为C,D

   (1) 当l_1垂直于x轴$t=-2$时，求四边形$ABCD$的面积

   (2) 当$t=0,l_1$的斜率为正实数，A在第一象限，B在第四象限时，试比较$\frac{|AC|\cdot|FB|}{|BD|\cdot|FA|}$和1的大小，并说明理由

(3) 是否存在实数$t \in (-1,1)$，使得对满足题意的任意直线l_1，直线AD, BC的交点总在x轴上.若存在，求出所有的t的值和此时直线AD, BC交点的位置；若不存在，说明理由.

分析：

(2) i. 质上考的双曲线的第二定义，如果把$t=0$往右拉到准线，则比值为1

ii. 再往回拉t，$|AC|, |BD|$同时变大，且变大的数值相同，但$|AC| > |BD|$，所以比值小于1

(2) i. 猜出来是准线，如果交点在x轴上，显然此时我们有比值为1，根据第2问，我们有充分理由相信答案就是准线

ii. 借助点初中的比例知识，可以将问题转化成$\frac{x_1-t}{y_1} + \frac{x_2-t}{y_2} = 0$(这边我们利用了化斜为直的技巧)

iii. 利用直线的倒斜截式结合韦达定理的套路

iv. 结合初中比例知识，确定交点就是右焦点和准线与x轴交点的连线段的中点

答案：$t = \frac{1}{2}, (\frac{5}{4}, 0)$

评析：这道题的结论具有一般性，把焦点换成$(m,0)$，则对应的直线变为$x = \frac{a^2}{m}$，推导的关键步骤是$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}$的表达式非常简单，圆锥曲线中有很多类似结论都跟这个表达式有关

4. (长宁12)$\star\star$对于给定的实数$k>0$，函数$f(x) = \frac{k}{x}$的图像上总存在点C，使得以C为圆心，1为半径的圆上有两个不同的点到原点O的距离为1，则k的取值范围是____________

分析：

i 首先根据原点O到圆C上所有点的距离分布确定满足条件的点C的限制是到原点距离在$(0,2)$内

ii 问题转化为函数$f(x)$上存在一点到原点的距离在$(0,2)$内

iii 结合几何，问题转化为$(\sqrt{k}, \sqrt{k})$到原点的距离小于2

答案：$(0,2)$

5. (长宁16)$\star\star$设$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$为$1, 2, \cdots, 10$的一个排列，则满足对任意正整数m, n，且$1 \le m < n \le 10$，都有$x_m + m \le x_n + n$成立的不同排列的个数为……………………………………………（　　）

A. 512　　B. 256　　C. 255　　D. 64

分析：

i 原限制条件等价于后面一项比前一项，下降不能超过1

ii 我们采用从简单到一般的策略，将10换成2,3,4，找出规律

a 一个规律是，可能的数列个数是按公比2递增

b 又或者，我们可以去寻求写出所有数列时产生的规律：首项确定了之后，后面的项必须依次减小1，一直减到不能再减；然后再跳到一个更大的数，然后再依次减；依次类推

iii 通过上面的规律，我们可以利用递推关系和数学归纳法，证明数列个数的表达式

iv 注意到结果是2的方幂，联想到子集个数的表达式，我们可以给出更简单的证明

a 考虑一般的n，通过前面的分析，我们发现要确定一个数列，关键就是要确定每次开始往下降的那些元素构成的集合，注意到这个集合必须含有n

b 数列与这样的集合之间有一一对应关系

c 这样的集合的总个数为2^{n-1}

答案：A

6. (长宁21)$\star$已知数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1, a_2 = a, a_{n+1} = k(a_n + a_{n+2})$对任意的$n \in \mathbb{N}^*$成立，数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$

(1) 若$\{a_n\}$是等差数列，求k的值

(2) 若$a=1,k=-\frac{1}{2}$，求S_n

(3) 是否存在实数k，使数列$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列且任意相邻三项按某顺序排列后成等差数列？若存在，求出所有的k；若不存在，说明理由

分析：

(3) i. 注意到每个公比q，都确定了一个k

ii. 等差数列在同比例放缩下仍保持

iii. 问题等价于前3项能构成等差数列

iv. 分类讨论，求出q，再求k

答案：$k=-\frac{2}{5}$

7. (宝山12)见长宁16[5]

8. (宝山16)⋆⋆若存在$t\in\mathbb{R}$与正数m，使$F(t-m)=F(t+m)$成立，则称"函数$F(x)$在$x=t$处存在距离为$2m$的对称点".设$f(x)=\frac{x^2+\lambda}{x}(x>0)$，若对于任意$t\in(\sqrt{2},\sqrt{6})$，总存在正数$m$，使得"函数$F(x)$在$x=t$处存在距离为$2m$的对称点"，则实数$\lambda$的取值范围是 ……………………………………………（　　）

A. $(0,2]$　　B. (1,2]　　C. [1,2]　　D. [1,4]

分析：

i 首先排除$\lambda\le 0$的情形，因为奇函数不可能满足条件

ii 我们从几何上来理解这个条件，问题等价于，函数$f(x)$图像上等高不同两点的中点的横坐标能取遍$(\sqrt{2},\sqrt{6})$

iii 注意到对勾函数等高两点的横坐标的乘积为定值λ，而且$\frac{1}{2}(x+\frac{\lambda}{x})$的最小值为$\lambda$，没有最大值，而且取最小值时两个等高的点是一样的

iv 问题等价于$\sqrt{\lambda}\le\sqrt{2}$

答案：A

9. (宝山21)⋆⋆⋆设$T\subset\mathbb{R}$，若存在常数$M>0$，使得对任意$t\in T$，均有$|t|\le M$，则称T为有界集合，同时称M为集合T的上界

(1) 设$A_1=\{y|y=\frac{2^x-1}{2^x+1},x\in\mathbb{R}\},A_2=\{x|\sin x>\frac{1}{2}\}$，试判断$A_1,A_2$是否为有界集合并说明理由

(2) 已知$f(x)=x^2+u$，记$f_1(x)=f(x),f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n=2,3,\cdots)$，若$m\in\mathbb{R},u\in[\frac{1}{4},+\infty)$，且$B=\{f_n(m)|n\in\mathbb{N}^*\}$为有界集合，求$u$的值及$m$的取值范围

(3) 设a,b,c均为正数，将$(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$中的最小数记为d，是否存在正数$\lambda\in(0,1)$,使得λ为有界集合$C=\{y|y=\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\}$的上界，若存在，试求$\lambda$的最小值；若不存在，说明理由

分析：

i 先分析第2问，这道题我已知的出处是06年全国联赛一试试题，知道了数列的蛛网迭代，基本上就是套路题了

ii 如果$u>\frac{1}{4}$，则$f(x)$恒在$y=x$的上方，利用蛛网迭代，$f_n(m)$会跑向无穷大

iii 严格证明，先取定m，记$a_n=f_n(m)$，则数列第二项开始全正，根据基本不等式，我们有$a_3=a_2^2+\frac{1}{4}+u-\frac{1}{4}\ge a_2+u-\frac{1}{4},a_4=a_3^2+\frac{1}{4}+u-\frac{1}{4}\ge a_3+u-\frac{1}{4},\cdots$，所以无界

iv 当$u=\frac{1}{4}$时，根据蛛网迭代，我们可以很容易确定$m\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，且此时$B$的上确界为$\frac{1}{2}$

v 下面分析第3问，这1问是不等式的典型套路题，我们利用基本不等式求最值是利用的等号条件，另一类求最值是利用边界条件

vi 我们使用局部调整法来找到集合的上确界，注意到a, b, c的位置对称且关于a, b, c齐次，我们不妨设$a \leq b \leq c$且$b = 1$，固定$a^2 + c^2$，我们发现减小a，能让$(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$这三项都变大，所以$d$变大，所以上确界必在$a = 0$时取得

vii 下面只要对c分两种情况讨论，就能得到$c = 2$时取到上确界，这就是λ的最小值

答案：$u = \frac{1}{4}, m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$；$\lambda$的最小值为$\frac{1}{5}$