

2016~2017 学年第二学期高一年级阶段性测评

数学试卷

(考试时间: 上午 8:00-9:30)

一、选择题

1. 已知向量 $a=(4,2), b=(2,y)$, 且 $a//b$, 则 $y=()$

- A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

考点: 向量共线的坐标表示

解析: $\because a//b \therefore 4y=4 \therefore y=1$

答案: D

2. 若 α 为第三象限角, 则 ()

- A. $\tan \alpha < 0$ B. $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$
C. $\sin \alpha < 0$ D. $\cos \alpha > 0$

考点: 三角函数符号

解析: $\because \alpha$ 为第三象限角 $\therefore \sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0, \tan \alpha > 0$

答案: C

3. 终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是 ()

- A. $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ B. $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
C. $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ D. $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

考点: 终边在同一条直线上的角的表示

解析: 与 α 终边在同一条直线上的角的集合为 $\{ \beta \mid \beta = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

\therefore 与 $\frac{\pi}{4}$ 终边在同一条直线上的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

答案: A

4. 已知 $a = \sin 33^\circ, b = \cos 55^\circ, c = \sin 120^\circ$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

考点: 三角函数比较大小

解析: 首先化为同名三角函数 $a = \sin 33^\circ \quad b = \cos 55^\circ = \sin 35^\circ \quad c = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ$

$\because y = \sin x$ 在 $[0^\circ, 90^\circ]$ 上单调递增 $\therefore c > b > a$

答案: C

5. 已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\vec{AB} = (2,3), \vec{AD} = (-1,2)$, 则 $\vec{AC} + \vec{BD} = ()$

- A. $(-2,4)$ B. $(4,6)$
C. $(-6,-2)$ D. $(-1,9)$

考点: 平面向量的运算

解析: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = (1, 5)$ $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = (-3, -1)$, 所以 $\vec{AC} + \vec{BD} = (-2, 4)$

答案: 选 A

6. 已知函数 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$, 则 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后关于原点对称

D. 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

考点: 三角函数的图像

解析: 对轴为: $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, 对称中心为 $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 0)$, 所以 A, B 错

函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到 $g(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$, 为奇函数, 所以选 C

答案: C

7. 下列说法不正确的是 ()

A. \vec{a}, \vec{b} 为不共线向量, 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$

B. 若 \vec{a}, \vec{b} 为平面内两个不相等向量, 则平面内任意向量 \vec{c} 都可以表示为 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

C. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}$, 则 \vec{a} 与 \vec{c} 不一定共线

D. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$

考点: 平面向量的基本定理, 平行 (共线) 向量性质, 向量线性运算.

解析: A 选项, \vec{a}, \vec{b} 为不共线向量, 则两向量均为非零向量, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 表示以向量 \vec{a}, \vec{b} 模长为邻边的平行四边形两对角线长度相等,

则该平行四边形为矩形, 则邻边垂直, 正确; B 选项, 由平面向量的基本定理知, 一组非零且不共线的向量可以表示出平面内的任意向量, \vec{a}, \vec{b} 为平面内两个不相等向量, 若共线仍无法作为一组基底表示, 错误; C 选项, 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为非零向量, 则 \vec{a} 与 \vec{c} 共线, 若 \vec{b} 为零向量, 则 \vec{a} 与 \vec{c} 不一定共线, 零向量与平面内的任意向量共线, 正确; D 选项, 符合向量数乘的运算法则, 正确.

答案: B.

8. 若 $\sin \alpha = 2\cos \alpha$, 则 $\sin 2\alpha = ()$

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{2}{5}$

D. $-\frac{4}{5}$

考点: 同角三角函数计算, 二倍角公式

解析: 因为 $\sin \alpha = 2\cos \alpha$, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, 则 $\cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha = 1$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 4\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$.

答案: B.

9. 函数 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 纵坐标不变, 横坐标变为原来的 2 倍, 再向上平移 1 个单位, 得到 $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$, 则 ()

- A. $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$ B. $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12}) + 1$
C. $f(x) = \cos 2x - 1$ D. $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) - 1$

考点: 三角函数的图像与变换

解析:

由 $f(x)$ 横坐标变为 2 倍得 $g(x)$, 可排除 B, D, A 选项变换后得到 $g(x) = -\cos x$, 排除; C 选项变换后得到

$$f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \sin[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} - x)] = \sin(x + \frac{\pi}{6}), \text{ 符合题意.}$$

答案: C

10. $\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ) = ()$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

考点: 三角恒等变换

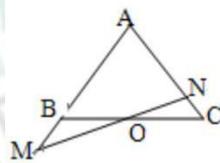
解析:

$$\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ) = \sin 50^\circ (1 + \frac{\sqrt{3} \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}) = \frac{\sin 50^\circ (\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{2 \sin 50^\circ \sin (10^\circ + 30^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$$

答案: D

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, O 为 BC 的中点, 过 O 的直线交 AB 、 AC 所在直线于 M 、 N , 若 $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n = ()$

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 3



考点: 向量三点共线问题

解析: 因为 O 是 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$, 即 $m\overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AO}$, 即 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}m\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}n\overrightarrow{AN}$, 因为

O 、 M 、 N 三点共线, 即所以 $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n = 1$, 即 $m + n = 2$

答案: A

12. 已知函数 $f(x) = \sin x - \cos x + \sin x \cos x$, 则 $f(x)$ 的值域为 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $[-\sqrt{2} + \frac{1}{2}, 1]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-\sqrt{2} - \frac{1}{2}, 1]$

考点: 三角函数的最值问题, 换元思想

解析: 设 $\sin x - \cos x = t (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$

$$\text{所以 } \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}, \text{ 则 } f(x) = \sin x - \cos x + \sin x \cos x \Rightarrow f(t) = t + \frac{1-t^2}{2} = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1$$

由函数单调性可知 $f(t)$ 在 $[-\sqrt{2}, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减

所以当 $t = 1$ 时, 函数取得最大值 $f(x)_{\max} = f(1) = 1$

当 $t = -\sqrt{2}$ 时, 函数取得最小值 $f(x)_{\min} = f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

所以函数的值域为 $[-\sqrt{2} - \frac{1}{2}, 1]$

答案: D

二、填空题

13. $\sin \frac{\pi}{6} =$ _____.

考点: 三角函数值

解析: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

答案: $\frac{1}{2}$

14. 若 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}, \tan \beta = \frac{1}{4}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

考点: 三角恒等变换

解析: $\tan \alpha = \tan(\alpha + \beta - \beta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan \beta} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{22}{20}} = \frac{3}{22}$

答案: $\frac{3}{22}$

15. 若, 则 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

考点: 平面向量数量积与模长

解析: 由 $\vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$ 知, $\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 知 $2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 1 + 4 = 6, \text{ 所以 } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{6}$$

答案: $\sqrt{6}$

16. 如图, 视一条河的两岸为两条平行直线, 河宽 500 m, 一艘船从河的一岸 A 处出发到河对岸. 已知船的速率为 20 km/h, 水流速率为 5 km/h, 当行驶航程最短时, 所用时间为 _____ min.

考点: 平面向量实际应用

解析: 当路线垂直于两岸时, 航程最短. 实际速率为 $5\sqrt{15}$ km/h 时, 时间为 $t = \frac{0.5}{5\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{150} h = \frac{2\sqrt{15}}{5} \text{ min}$

答案: $\frac{2\sqrt{15}}{5}$

三、解答题

17. (本小题满分 8 分)

已知向量 $\vec{a} = (\lambda, 3), \vec{b} = (-2, 4)$

(1) 若 $(2\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 求 λ

(2) 若 $\lambda = 4$, 求向量 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影 $|\vec{a}| \cos \theta$ (其中 θ 是 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角)

考点: 平面向量的运算

分析: (1) 由 $\vec{a} = (\lambda, 3), \vec{b} = (-2, 4)$, 可知 $2\vec{a} + \vec{b} = (2\lambda - 2, 2)$, 结合 $(2\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 即 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 可解得 λ 的值

(2) 由 $|\vec{a}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ 可求得结果

答案: (1) $\because \vec{a} = (\lambda, 3), \vec{b} = (-2, 4) \therefore 2\vec{a} + \vec{b} = (2\lambda - 2, 10)$

$$\text{又 } (2\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b} \therefore (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore (2\lambda - 2) \times (-2) + 4 \times 10 = 0 \therefore \lambda = 11$$

(2) 由 $\lambda = 4$, 可知 $\vec{a} = (4, 3), \vec{b} = (-2, 4)$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-2) + 3 \times 4 = -8 + 12 = 4 \quad |\vec{b}| = 2\sqrt{5} \therefore |\vec{a}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

18. 已知: $f(\alpha) = \frac{\sin^2(\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\tan(\pi - \alpha) \tan \alpha \cos^2(\pi - \alpha)}$

(1) 化简 $f(\alpha)$;

(2) 若 α 为第四象限角, 且 $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $f(\alpha + \frac{\pi}{3})$

考点: 诱导公式, 弦切互化, 三角函数的公式;

分析: (1) 利用诱导公式化简 $f(\alpha)$, (2) 化简后再求值, 对式子两边平方, 利用 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ 这一关系。

答案:

$$(1) f(\alpha) = \frac{\sin^2(\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\tan(\pi - \alpha) \tan \alpha \cos^2(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{-\tan \alpha \cdot \tan \alpha \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$$

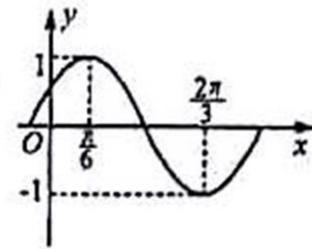
$$(2) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, (\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})^2 = 1 + \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{5}, \because \alpha \text{ 是第四象限}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} \therefore f(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{2}-1}{10}$$

19、函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上的单调递增区间及其在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的值域。



考点: 三角函数的图像和性质、单调性和值域

分析: 根据图像可以得到振幅, 周期等信息, 利用公式求解出函数 $f(x)$

的解析式, 再结合解析式求解单调性和值域。

答案: (1) 由图像可知 $A = 1, \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $T = \pi$,

又 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 又 $(\frac{\pi}{6}, 1)$ 在图像上,

所以 $f(\frac{\pi}{6}) = \sin(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = 1$, 由题可知 $\varphi = \frac{\pi}{6}$

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$

(2) $f(x)$ 的单调递增区间为 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 即 $2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 即

$k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$, 又 $x \in [\pi, 2\pi]$

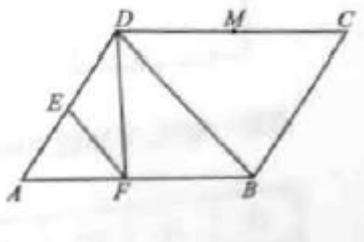
所以单调递增区间为 $[\pi, \frac{7\pi}{6}]$, $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}]$, 根据函数的性质可得, 值域为 $[-1, \frac{1}{2}]$

20.(A)已知平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=1, \angle BAD=60^\circ, M$ 为 CD 中点, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}$.

(1)求 AB 的长.

(2) 设 E, F 为线段 AD, AB 上的动点, 且 $EF \parallel BD$, 求 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}$ 的最小值.



考点: 平面向量基本运算

解析: (1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$

$$= |\overrightarrow{AD}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}$$

设 $|\overrightarrow{AB}| = x$, 则有 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -\frac{3}{2}$, 故 $|\overrightarrow{AB}| = 2$

(2) $\because EF \parallel BD, \therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AB}$, 设 $AE = \lambda AD, AF = \lambda AB$,

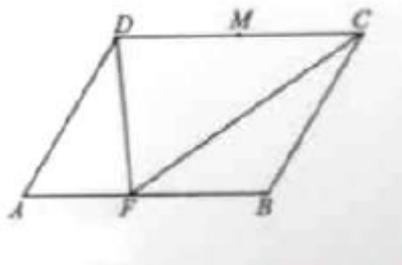
$$\text{则 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = \lambda \overrightarrow{AD} \cdot (\lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \lambda^2 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{AD}^2 = \lambda^2 - \lambda$$

$$\lambda^2 - \lambda = (\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}, \text{ 故 } \lambda^2 - \lambda \text{ 的最小值为 } -\frac{1}{4}, \therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} \text{ 的最小值为 } -\frac{1}{4}.$$

20.(B) 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=1, \angle BAD=60^\circ, M$ 为 CD 的中点, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}$.

(1)求 AB 的长;

(2)设 F 为线段 AB 上的动点 (不包含端点), 求 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DF}$ 的最小值, 以及此时点 F 的位置.



考点: 向量数量积与基底法的应用

分析:

(1) 解: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

$$\vec{AC} \cdot \vec{BM} = (\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}) = \vec{AD}^2 - \frac{1}{2}\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1 - \frac{1}{2}|\vec{AB}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{AB}|^2 = -\frac{1}{2} \therefore |\vec{AB}| = 2$$

(2) 设 $\vec{AF} = \lambda\vec{AB}$, 则 $\vec{CF} = -\vec{AD} - (1-\lambda)\vec{AB}$, $\vec{DF} = -\vec{AD} + \lambda\vec{AB}$

$$\therefore \vec{CF} \cdot \vec{DF} = -[\vec{AD} + (1-\lambda)\vec{AB}](-\vec{AD} + \lambda\vec{AB}) = -|\vec{AD}|^2 + \lambda(1-\lambda)|\vec{AB}|^2 + (2\lambda-1)\vec{AB} \cdot \vec{AD} = -4\lambda^2 + 6\lambda - 2$$

所以当 $\lambda = \frac{3}{4}$ 时, $\therefore \vec{CF} \cdot \vec{DF} = \frac{1}{4}$, 此时 F 为 AB 的四等分点 (靠近 B) 即 $AF = \frac{3}{2}$

21(A) 已知 $\vec{a} = (\sin \omega x, \cos \omega x)$, $\vec{b} = (\cos \omega x, \sqrt{3} \cos \omega x)$, $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

(1) 求 ω 的值

(2) 若 $2\alpha + \frac{\pi}{3}$, $f(\alpha) = \frac{3}{5}$, $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{12}$, $f(\beta) = -\frac{5}{13}$, $-\frac{2\pi}{3} < \beta < -\frac{5\pi}{12}$, 求 $\cos(2\alpha - 2\beta)$ 的值

考点: 向量与三角函数的综合

解析: (1) $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \omega x \cos \omega x + \sqrt{3} \cos^2 \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\omega x = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{3})$

周期为 π , 即 $\omega = 1$

(2) $\cos(2\alpha - 2\beta) = \cos[(2\alpha + \frac{\pi}{3}) - (2\beta + \frac{\pi}{3})] = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{3})\cos(2\beta + \frac{\pi}{3}) + \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3})\sin(2\beta + \frac{\pi}{3})$

$$f(\alpha) = \frac{3}{5}, -\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{12}, \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{5}, 0 < 2\alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}, \therefore \cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{4}{5}$$

$$f(\beta) = -\frac{5}{13}, -\frac{2\pi}{3} < \beta < -\frac{5\pi}{12}, \sin(2\beta + \frac{\pi}{3}) = -\frac{5}{13}, -\pi < 2\beta + \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{2}, \therefore \cos(2\beta + \frac{\pi}{3}) = -\frac{12}{13}$$

$$\text{代入上式的 } \cos(2\alpha - 2\beta) = \cos[(2\alpha + \frac{\pi}{3}) - (2\beta + \frac{\pi}{3})] = \frac{4}{5} \times (-\frac{12}{13}) + \frac{3}{5} \times (-\frac{5}{13}) = -\frac{63}{65}$$

21. 已知 $\vec{a} = (\sin \omega x, \cos \omega x)$, $\vec{b} = (\cos \omega x, \sqrt{3} \cos \omega x)$, $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且函数 $f(x)$ 的最小正周期为 ρ 。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若关于 x 的方程 $2f(x - \frac{\rho}{6}) + f(x + \frac{\rho}{12}) = m$, 在 $[0, \rho)$ 内有两个不同的解 a, b , 求证 $\cos(2a - 2b) = \frac{2}{5}m^2 - 1$ 。

考点: 平面向量的坐标运算, 三角函数的周期性, 恒等变换公式与变换, 函数与方程思想;

解析: (1) $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\omega x + \sqrt{3} \cos^2 \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\omega x + \sqrt{3} \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\omega x = \sin(2\omega x + \frac{\rho}{3})$$

$$\therefore T = \pi, T = \frac{2\pi}{2\omega}, \therefore \omega = 1 \quad \therefore f(x) = \sin(2x + \frac{\rho}{3})$$

(2) 求证: $2f(x - \frac{\rho}{6}) + f(x + \frac{\rho}{12}) = m$, $\therefore 2\sin[2(x - \frac{\rho}{6}) + \frac{\rho}{3}] + \sin[2(x + \frac{\rho}{12}) + \frac{\rho}{3}] = m$

$$\therefore 2\sin 2x + \cos 2x = m, \quad \square \begin{cases} 2\sin 2x + \cos 2x = m \\ \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 5\sin^2 2x - 4m\sin 2x + m^2 - 1 = 0;$$

方程在 $[0, \rho)$ 内有两个不同的解 a, b

$$\therefore \sin 2\alpha + \sin 2\beta = \frac{4m}{5}, \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{m^2 - 1}{5},$$

$$\cos 2a \times \cos 2b = (m - 2\sin 2a)(m - 2\sin 2b) = m^2 - 2m(\sin 2a + \sin 2b) + 4(\sin 2a \times \sin 2b) = \frac{m^2}{5} - \frac{4}{5}$$

$$\cos(2\alpha - 2\beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{m^2 - 4}{5} + \frac{m^2 - 1}{5} = \frac{2m^2}{5} - 1$$