太原市 2017 年高三年级模拟试题（二）

数学试卷分析（文史类）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求，请将其字母标号填入下表相应位置）

1.已知 $\dfrac{z}{(1+i)^2}=1-i$（i 为虚数单位），则复数 z 在复平面内对应的点的坐标是

A $(2,-2)$　　B $(2,2)$　　C $(-2,-2)$　　D $(-2,2)$

答案： B

解析： 本题主要考查复数的几何意义，由题意得复数 $z=2+2i$，在复平面内的坐标为 $(2,2)$，故本题正确答案为 B.

2.已知集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{y|y=\log_2 x,\ x\in A\}$，则 $A\cup B=$

A $\{1,2\}$　　B $[1,2]$　　C $\{0,1,2,4\}$　　D $[0,4]$

答案： C

解析： $B=\{y|y=\log_2 x,\ x\in A\}$ 将集合 A 中元素分别带入 $y=\log_2 x$ 得到集合 $B=\{0,1,2\}$，$A\cup B=\{0,1,2,4\}$，故本题正确答案为 C.

3.已知 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-1,1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

答案： A

解析： 本题主要考察向量的投影．根据定义，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $|\vec{b}|\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{2\times(-1)+1\times1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 故本题正确答案为 A.

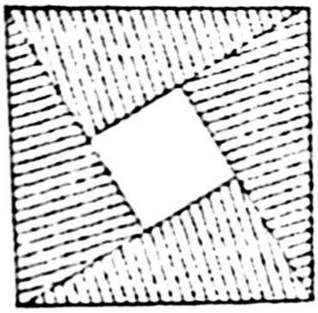
4.已知公比 $q\neq1$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=1$，$S_3=3a_3$，则 $S_5=$

A. 1　　B. 5　　C. $\frac{31}{48}$　　D. $\frac{11}{16}$

答案： D

解析： 因为 $S_3=a_1+a_2+a_3=3a_3$，所以 $a_1+a_2=2a_3$，化简得 $1+q-2q^2=0$，$q=1$(舍)或 $q=-\frac{1}{2}$，由等比数列前 n 项求和公式得 $S_5=\frac{11}{16}$，故本题正确答案为 D.

5. 如图，“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形（阴影部分）围成一个大正方形，中间空出一个小正方形组成的图形，若在大正方形内随机取一点，该点落在小正方形的概率为 $\frac{1}{5}$，则途中直角三角形中较大锐角的正弦值为



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

答案： B.

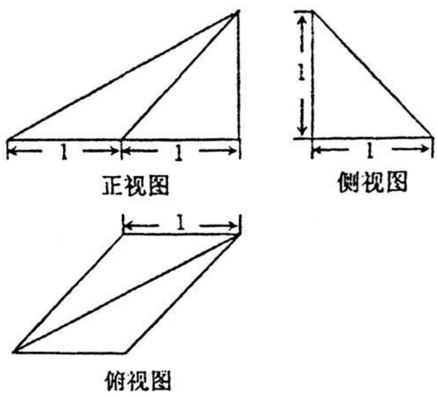
解析：

设大正方形边长为 a，则小正方形的面积为

$a^2-4\times\frac{1}{2}\times a\cos\theta\times a\sin\theta=a^2-a^2\sin 2\theta$，因此 $\frac{a^2-a^2\sin 2\theta}{a^2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin 2\theta=\frac{4}{5}$，因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+\sin 2\theta}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1-\sin 2\theta}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，选 B.

6. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

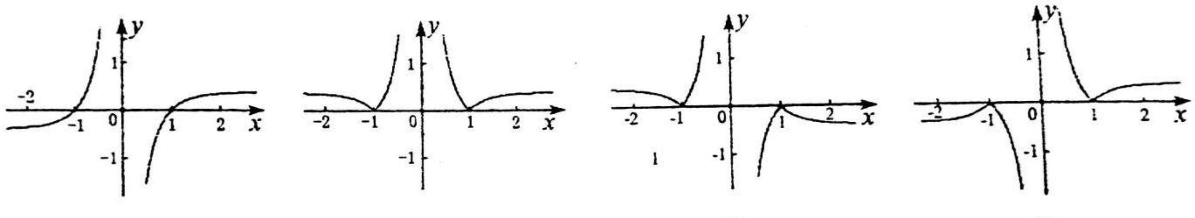


答案： D.

解析：

由三视图可知，该几何体为一个四棱锥，棱锥底面为一个底边和高均为1的平行四边形，棱锥高为1，所以该四棱锥面积为 $\frac{1}{3}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}$，选 D.

7. 函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln|x|}{x}$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

答案： A

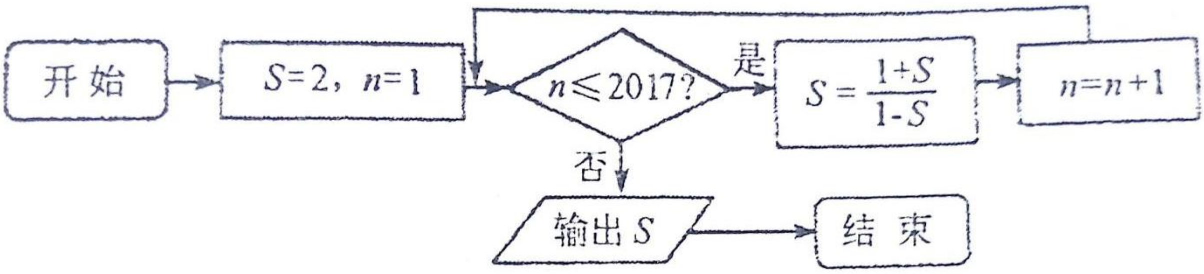
解析：

当 $0<x<1$ 时， $x>0,\ln x>0,\ f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}>0$，

当 $x>1$ 时， $x>0,\ln x<0,\ f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}<0$， 选 A.

8. 执行下面的程序框图，则输出 $S=$

A. 2　　B. -3　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$



答案： B.

解析：

$S=2,\ n=1,\ n\le 2017$，进入循环；

$S=\dfrac{1+S}{1-S}=-3, n=2\le 2017$，进入循环；

$S=\dfrac{1+S}{1-S}=-\dfrac{1}{2}, n=3\le 2017$，进入循环；

$S=\dfrac{1+S}{1-S}=\dfrac{1}{3}, n=4\le 2017$，进入循环；

$S=\dfrac{1+S}{1-S}=2, n=5\le 2017$，进入循环；

……

由观察可知，S 周期为 4，则有

$S=2, n=2017\le 2017$，进入循环；

$S=-3, n=2018>2017$，退出循环，输出 $S=-3$，选 B.

9.已知实数 x，y 满足条件 $\begin{cases}3x+y-7\ge 0\\ x+3y-13\le 0\\ x-y-1\le 0\end{cases}$，则 $z=|2x+y|$ 的最小值为

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

答案： C

解析：

根据已知条件，画出可行域，根据线性规划原则，当取 $(2,1)$ 时，$z=|2x+y|$ 最小，

此时 $z=5$，选 C.

10.将函数 $f(x)=\cos 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在 $\left(-2m,-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 和 $\left(3m,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 上都单调递减，则实数 m 的取值范围为

A.$[\dfrac{\pi}{9},\dfrac{5\pi}{18})$　　B.$[\dfrac{\pi}{9},\dfrac{\pi}{3})$　　C.$(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{18})$　　D.$[\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{12}]$

答案： A.

解析：

由题意，有 $g(x)=\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

$g(x)$ 单调递减区间为 $2k\pi\le 2x-\dfrac{2\pi}{3}\le 2k\pi+\pi$，即 $k\pi+\dfrac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$.

若 $g(x)$ 在 $\left(-2m,-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，则有 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{6}\le k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\\ -2m\ge k\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ -2m<-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$，此时 $k=-2$，$\dfrac{\pi}{12}<m\le\dfrac{\pi}{3}$；

若 $g(x)$ 在 $\left(3m,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减，则有 $\begin{cases}\dfrac{5\pi}{6}\le k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\\ 3m\ge k\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ 3m<-\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$，此时 $k=0$ 解得 $\dfrac{\pi}{9}\le m<\dfrac{5\pi}{18}$；

同时成立，取交集，有 $\dfrac{\pi}{9}\le m<\dfrac{5\pi}{18}$，选 A.

11. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，直线 $y=kx+m$ 与抛物线相交于 A，B 两个不同的点，点 $M(2,2)$ 是 AB 的中点，则 $\triangle AOB$（O 为坐标原点）的面积是

A. $4\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{14}$　　D. $2\sqrt{3}$

答案： D

解析： 由已知可得双曲线的右焦点为 $(2,0)$ 同时也为抛物线的焦点，所以 $p=4$，所以抛物线方程为 $y^2=8x$，又因为直线 $y=kx+m$ 与抛物线相交于 A，B 两点，所以将直线带入抛物线方程可得 $(kx+m)^2=8x\Rightarrow k^2x^2+(2km-8)x+m^2=0$

又因为 $M(2,2)$ 是 A，B 的中点，所以 $x_1+x_2=\dfrac{8-2km}{k^2}=4$

且 $2=2k+m$，联立解得 $k=2$，$m=-2$

直线 $AB=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-x_2|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{15}$

O 到 AB 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{15}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=2\sqrt{3}$，故选 D

12.已知 $f(x)=x^2\cdot e^x$，若函数 $g(x)=f^2(x)-kf(x)+1$ 恰有三个零点，则下列结论正确的是

A. $k=\pm 2$　　B. $k=\dfrac{8}{e^2}$　　C. $k=2$　　D. $k=\dfrac{4}{e^2}+\dfrac{e^2}{4}$

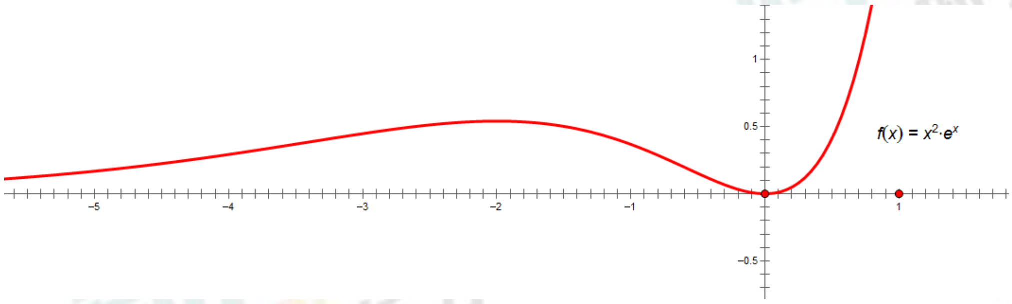
答案： D

解析： 要使得函数 $g(x)=f^2(x)-kf(x)+1$ 恰有三个零点，

则要求 $g(x)=0$ 有两个正解，设为 x_1,x_2

即要求 $f(x)=x_1$ 或 $f(x)=x_2$ 有三个解

即要求 $y=f(x)$ 与 $y=x_1$ 交点的个数以及 $y=f(x)$ 与 $y=x_2$ 交点的个数和为 3



根据 $f(x)=x^2\cdot e^x$ 大致图象，不妨设 $y=f(x)$ 与 $y=x_1$ 交点的个数为 2 个

则 $x_1=f(-2)=\dfrac{4}{e^2}$，又 $x_1\cdot x_2=1$，则 $x_2=\dfrac{e^2}{4}$

故 $k=x_1+x_2=\dfrac{4}{e^2}+\dfrac{e^2}{4}$，选 D.

二、**填空题：** 本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若命题“$\forall x\in(0,+\infty), x+\frac{1}{x}\ge m$”是假命题，则实数 m 的取值范围是__________.

答案：$(2,+\infty)$

解析：由题意可知，命题“$\exists x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}<m$”是真命题，又因为 $x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}\ge 2$

所以实数 m 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

14．已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，则 $\sin 2\alpha=$__________.

答案：$-\frac{24}{25}$

解析：$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　又 $\because \sin\alpha=\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，　$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$

15．已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle BAC=60^\circ$，$BC=1$，则 ΔBOC 面积的最大值为______.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{12}$

解析：因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $\angle BOC=180^\circ-\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=120^\circ$

由余弦定理可得 $BC^2=OC^2+OB^2-2OC\cdot OB\cdot\cos 120^\circ$，即 $OC^2+OB^2=1-OC\cdot OB$

又因为 $OC^2+OB^2\ge 2OC\cdot OB$，所以 $OC\cdot OB\le\frac{1}{3}$

则 ΔBOC 面积 $S=\frac{1}{2}OC\cdot OB\cdot\sin 120^\circ\le\frac{\sqrt{3}}{12}$，则 $\triangle BOC$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

16．已知三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AC=BC=2$，$BD=CD=\sqrt{2}$，点 E 是 BC 的中点，点 A 在平面 BCD 射影恰好为 DE 的中点，则该三棱锥外接球的表面积为__________.

答案：$\frac{60}{11}\pi$

解析：由题意可知 ΔBCD 为等腰直角三角形，其外接圆的圆心为 BC 的中点 E，即三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心在过点 E 且垂直于平面 BCD 的直线上，因此外接球的球心为该直线与 AD 垂直平分线的交点.

以点 E 为原心，DE 所在直线为 x 轴，过点 E 且垂直于平面 BCD 的直线为 y 轴建立

平面直角坐标系，则 $E(0,0)$， $D(1,0)$， $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{11}}{2})$，$AD$ 中点 $F(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{11}}{4})$.

可得 $k_{AD}=-\sqrt{11}$，AD 垂直平分线的斜率为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$，

直线方程为：$y-\frac{\sqrt{11}}{4}=\frac{\sqrt{11}}{11}(x-\frac{3}{4})\Rightarrow y=\frac{\sqrt{11}}{11}x+\frac{2\sqrt{11}}{11}$，

圆心为 $(0,\frac{2\sqrt{11}}{11})$，外接球半径为 $R=\sqrt{1+(\frac{2\sqrt{11}}{11})^2}=\sqrt{\frac{15}{11}}$，

外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{60}{11}\pi.$

三、**解答题**（本大题共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}(n\in N^*)$

（1） 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2） 若 $c_n=2^{a_n}\cdot(b_n-1)(n\in N^*)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

答案：（1） $b_n=2n+1$；

（2） $T_n=(1-n)2^{n+2}-4$

解析： （1）因为 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=n$，所以 $b_n=a_n+a_{n+1}=2n+1$

（2） $c_n=2^{a_n}\cdot(b_n-1)=n\cdot2^{n+1}$

$$T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4\ldots\ldots+(n-2)\times2^{n-1}+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$$
$$2T_n=\quad 1\times2^3+2\times2^4+3\times2^5\quad\ldots\quad+(n-2)\times2^n+(n-1)\times2^{n+1}+n\times2^{n+2}$$
$$-T_n=2^2+2^3+2^4\ldots\ldots+2^{n-1}+2^n+2^{n+1}-n\times2^{n+2}$$
$$=\frac{2^2\times(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+2}=(1-n)2^{n+2}-4,\quad\therefore\ T_n=(n-1)2^{n+2}+4$$

18.（本小题满分 12 分）

某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额的商品后即可抽奖，抽奖规则如下：

1.抽奖方案有以下两种，方案 a：从装有 1 个红球、2 个白球（仅颜色不同）的甲袋中随机摸出 1 个球，若是红球，则获得奖金 15 元；否则，没有奖金，兑奖后将抽出的球放回甲袋中；方案 b：从装有 2 个红球，1 个白球（仅颜色不同）的乙袋中随机摸出 1 个球，若是红球， 则获得奖金 10 元；否则，没有奖金，兑奖后将抽出的球放回乙袋中.

2.抽奖的条件是，顾客购买商品的金额满 100 元，可根据方案 a 抽奖一次；满 150 元，可根据方案 b 抽奖一次（例如某顾客购买商品的金额为 310 元，则该顾客采用的抽奖方式可以有以下三种，根据方案 a 抽奖三次或方案 b 抽奖两次或方案 a、b 各抽奖一次），已知顾客 A 在该商场购买商品的金额为 250 元.

（Ⅰ）若顾客 A 只选择方案 a 进行抽奖，求其所获奖金为 15 元的概率；

（Ⅱ）若顾客 A 采用每种抽奖方式的可能性都相等，求其最有可能获得的奖金数（除 0 元外）

解析：

（Ⅰ）设"获奖金为 15 元"为事件 B，则 $P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$；

（Ⅱ）若按方案 a 抽奖两次，则获得奖金 15 元的概率为 $P_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$；

则获得奖金 30 元的概率为 $P_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

若按方案 a、b 抽奖两次，则获得奖金 15 元的概率为 $P_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

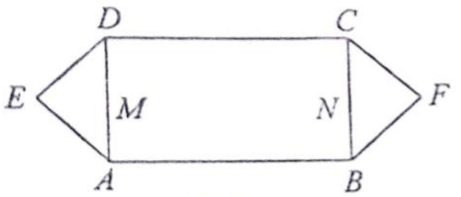
则获得奖金 10 元的概率为 $P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$；

则获得奖金 25 元的概率为 $P_5=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

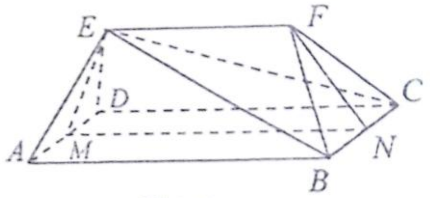
因此，最有可能获得的奖金数为 15 元.

19. (本小题满分 10 分)

如图（1），在平面六边形 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，且 $AB=4$，$BC=2$，$AE=DE=BF=CF=\sqrt{2}$，点 M，N 分别是 AD，BC 的中点，分别沿直线 AD，BC 将 $\triangle ADE$，$\triangle BCF$ 翻折成如图（2）的空间几何体 $ABCDEF$.



图(1)



图(2)

（Ⅰ）利用下列结论 1 或结论 2，证明：E、F、M、N 四点共面；

结论 1：过空间一点作已知直线的垂面，有且仅有一个．

结论 2：过平面内一条直线作该平面的垂面，有且仅有一个．

（Ⅱ）若二面角 $E-AD-B$ 和二面角 $F-BC-A$ 都是 60°，求三棱锥 $E-BCF$ 的体积．

解析：

（Ⅰ）由题意，点 E 在底面 $ABCD$ 的射影在 MN 上，可设为点 P，

同理，点 F 在底面 $ABCD$ 的射影在 MN 上，可设为点 Q，

则 $EP\perp$ 平面 $ABCD$，$FQ\perp$ 平面 $ABCD$，

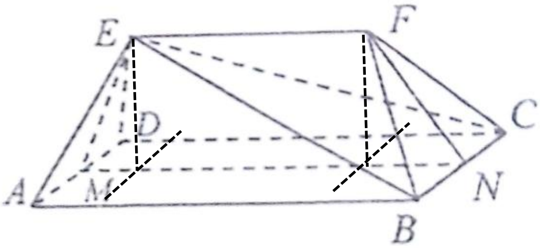
$\therefore$ 平面 $EMP\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $FNQ\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $MN\subset$ 平面 $ABCD$，$MN\subset$ 平面 EMP，$MN\subset$ 平面 FNQ

由结论 2，过平面内一条直线作该平面的垂面，有且仅有一个，

则 E、F、M、N 四点共面．

（Ⅱ）若二面角 $E-AD-B$ 和二面角 $F-BC-A$ 都是 60°



则 $\angle EMP=\angle FNQ=60^{\circ}$，易得 $EM=FN=1$，

则 $MP=EM\cos 60^{\circ}=\dfrac{1}{2}$，$EP=EM\sin 60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

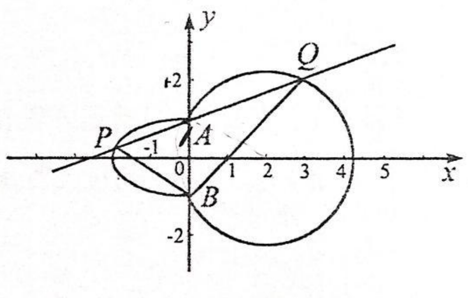
$V_{E-BCF}=V_{ABCDEF}-V_{E-ABCD}$

$$=2\cdot\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\cdot 2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2)\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot(4\cdot 2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20.(本小题满分 12 分)

如图，曲线 C 由左半椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,x\le 0)$ 和圆 $N:(x-2)^2+y^2=5$ 在 y 轴右侧的部分连接而成，A, B 是 M 与 N 的公共点，点 P, Q（均异于点 A, B）分别是 M, N 上的动点.



（1）若 $|PQ|$ 的最大值为 $4+\sqrt{5}$，求半椭圆 M 的方程；

（2）若直线 PQ 过点 A，且 $\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$，$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{BQ}$，求半椭圆 M 的离心率.

解析：

(1)由已知得：当 P 为半椭圆与 x 轴的左交点，Q 为圆与 x 轴右交点时，

$|PQ|$ 会取得最大值，即 $\sqrt{5}+2+a=4+\sqrt{5}$，解得 $a=2$

由图象可得 $A(0,1)$，即 $b=1$

故半椭圆方程为 $M:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(x\le 0)$

(2)设直线 PQ 方程为 $y=kx+1$，$P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$

联立 $\begin{cases}y=kx+1\\(x-2)^2+y^2=5\end{cases}$ 可得 $(k^2+1)x^2+(2k-4)x=0$

故 $x_A+x_Q=\dfrac{4-2k}{k^2+1}$，因此 $x_Q=\dfrac{4-2k}{k^2+1}$，$y_Q=\dfrac{-k^2+4k+1}{k^2+1}$

又 $\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$，且 $\overrightarrow{AQ}=(x_Q,y_Q-1),\overrightarrow{AP}=(x_P,y_P-1)$

故 $\begin{cases}x_Q+x_P=0\\y_Q+y_P=2\end{cases}$，因此 $x_P=\dfrac{2k-4}{k^2+1}$，$y_P=\dfrac{3k^2-4k+1}{k^2+1}$

又 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{BQ}$， 且 $\overrightarrow{BQ}=(x_Q,y_Q+1),\overrightarrow{BP}=(x_P,y_P+1)$

$$x_P\cdot x_Q+(y_P+1)\cdot(y_Q+1)=\frac{-(2k-4)^2}{(k^2+1)^2}+\frac{(-k^2+4k+1)(3k^2-4k+1)}{(k^2+1)^2}+2+1$$

$=(k^2+1)(16k-12)=0$

解得 $k=\frac{3}{4}$， 故 $P(-\frac{8}{5},-\frac{1}{5})$

将 $P(-\frac{8}{5},-\frac{1}{5})$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 解得 $a^2=\frac{8}{3}$

故 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-2x(a\in R)$

(1)当 $a=0$ 时， 求 $f(x)$ 的最小值；

(2)当 $a<\frac{e}{2}-1$ 时， 证明： 不等式 $f(x)>\frac{e}{2}-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

解析：

(1)当 $a=0$ 时， $f(x)=e^x-2x$

$f'(x)=e^x-2$

令 $f'(x)=e^x-2=0$ 解得 $x=\ln 2$

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

故当 $x=\ln 2$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $f(\ln 2)=2-2\ln 2$

(2) $f'(x)=e^x-2ax-2$

$f'(1)=e-2-2a>e-2-2(\frac{e}{2}-1)=0$

$f'(0)=-1<0$

故存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f'(x_0)=0$

令 $h(x)=e^x-2ax-2$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)=e^x-2a>e^0-2(\frac{e}{2}-1)=3-e>0$

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $h(x_0)=0$，因此 $x=x_0$ 是 $h(x)$ 的唯一零点.

且在 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 取得最小值 $f(x_0)=e^{x_0}-ax_0^{\ 2}-2x_0=e^{x_0}-x_0(ax_0+2)$

又 $h(x_0)=0$ 即 $e^{x_0}-2ax_0-2=0$ 可得 $ax_0+1=\frac{e^{x_0}}{2}$

因此 $f(x_0)=e^{x_0}-x_0(\frac{e^{x_0}}{2}+1)=e^{x_0}(1-\frac{x_0}{2})-x_0$

构造函数：令 $g(t)=e^t(1-\frac{t}{2})-t$

$g'(t)=e^t(\frac{1}{2}-\frac{t}{2})-1$，二次求导可得 $g''(t)=e^t(-\frac{t}{2})$

故当 $t\in(0,1)$ 时，$g''(t)<0$，即 $g'(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 单调递减，

则当 $t\in(0,1)$ 时，$g'(t)<g'(0)<0$，可得 $g(t)=e^t(1-\frac{t}{2})-t$ 在 $t\in(0,1)$ 单调递减

所以 $f(x_0)=e^{x_0}(1-\frac{x_0}{2})-x_0$ 在 $x_0\in(0,1)$ 单调递减

因此 $f(x)_{\min}=f(x_0)>e^1(1-\frac{1}{2})-1=\frac{e}{2}-1$，得证.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.作答时请把答题卡上所选题目题号后的方框涂黑.

22.（本小题满分 10 分）**选修 4-4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$，（其中 φ 为参数）.以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho(\tan\alpha\cdot\cos\theta-\sin\theta)=1$（$\alpha$ 为常数，$0<\alpha<\pi$，且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$），点 A，B（A 在 x 轴的下方）是曲线 C_1 与 C_2 的两个不同交点.

（1）求曲线 C_1 普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）求 $|AB|$ 的最大值及此时点 B 的坐标.

解析：

（1）$C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$C_2:x\tan\alpha-y-1=0$

（2）将 C_2 转化为参数方程：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=-1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）

将 C_2 参数方程代入 C_1，得 $(\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)t^2-2\sin\alpha t=0$

则 $t_1+t_2=\dfrac{2\sin\alpha}{\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$，$t_1\cdot t_2=0$

$\therefore |AB|=\left|\dfrac{2\sin\alpha}{\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right|=\left|\dfrac{8}{3\sin\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}}\right|$

$\because \alpha\in(0,\pi),\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\alpha\in(0,1)$ $\therefore |AB|_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，此时点 B 的坐标为 $(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\dfrac{1}{3})$.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4-5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|x+m|+|2x-1|(m>0)$.

（1）当 $m=1$时，解不等式 $f(x)\geq 3$；

（2）当 $x\in\left[m,2m^2\right]$时，不等式 $\dfrac{1}{2}f(x)\leq|x+1|$恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析：

（1）当 $m=1$时，$f(x)=|x+1|+|2x-1|$，

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-3x & ,x<-1\\ 2-x, & -1\leq x\leq\dfrac{1}{2},\\ 3x & ,\quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore f(x)\geq 3\Rightarrow x\leq -1$或 $x\geq 1$.

（2）$\dfrac{1}{2}f(x)\leq|x+1|\Rightarrow\dfrac{1}{2}|x+m|+\dfrac{1}{2}|2x-1|\leq|x+1|$,

$\because x\in\left[m,2m^2\right]$ 且 $m>0$，

$\therefore \frac{1}{2}x+\frac{m}{2}\le |x+1|-\frac{1}{2}|2x-1 \quad \Rightarrow \quad m\le 2|x+1|-|2x-1|-x$

令 $t(x)=2|x+1|-|2x-1|-x=\begin{cases}3x+1, & 0<x\le\frac{1}{2}\\ 3-x, & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$，

由 题 意 得 $\begin{cases}m>0\\ m<2m^2\end{cases} \Rightarrow \quad m>\frac{1}{2}$，

$t(x)_{\min}=t(2m^2)\ge m\Rightarrow m\le 1$， $\therefore \ \frac{1}{2}<m\le 1$.

更多的真题下载地址：http://ty.xdf.cn　　　　咨询电话：0351-3782999