

2016~2017 学年第二学期高二年级阶段性测试

数学试卷分析 (理科)

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分. 在每小题给出的四个选项中, 有且只有一项符合题目要求, 请将其字母标号填入下表相应位置)

1. 复数 $2-i$ 的共轭复数是 ()

- A. $2+i$ B. $-2+i$ C. $-2-i$ D. $1+2i$

答案: A

解析: 利用共轭复数的定义即可得出答案为 A.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 类比推理、归纳推理、演绎推理都是合情推理
B. 合情推理得到的结论一定是正确的
C. 合情推理得到的结论不一定正确
D. 归纳推理得到的结论一定是正确的

答案: C

解析: 合情推理的结论不一定正确.

3. 已知函数 $f(x) = 2e^x$, 则 ()

- A. $f'(x) = f(x) + 2$ B. $f'(x) = f(x)$ C. $f'(x) = 3f(x)$ D. $f'(x) = 2f(x)$

答案: B

解析: $f'(x) = 2e^x = f(x)$, 所以选 B.

4. 已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(3, 4)$, 复数 z 的共轭复数为 \bar{z} , 那么 $z \cdot \bar{z}$ 等于 ()

- A. 5 B. -7 C. 12 D. 25

答案: D

解析: $z = 3 + 4i$, $\bar{z} = 3 - 4i$, $z \cdot \bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 25$.

5. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 在 $x = -1$ 处取得极值 -1 , 那么 $f(x) =$ ()

- A. $x^2 - 2x - 4$ B. $x^2 + x - 1$
C. $x^2 + 2x$ D. $x^2 - 2$

()

A.1

B.2

C.3

D.4

答案:B

解析: 此题最简便的方法就是将选项逐一代入进行验证, 当 $k=1$ 时, $f(x)=(e^x-1)(x-1)$, $f'(x)=xe^x-1$, 此时 $f'(1)=e-1 \neq 0$, 所以可知不可能在 $x=1$ 处取到极小值; 当 $k=2$ 时, $f(x)=(e^x-1)(x-1)^2$, $f'(x)=(x-1)(xe^x+e^x-2)$, 此时 $f'(1)=0$, 而且对于 $x-1$, x 大于 1 的时候大于零, x 小于 1 的时候小于零, 对于 xe^x+e^x-2 , x 大于 1 的时候大于零, x 小于 1 的时候也大于零, 所以 $f'(x)$ 在 $x=1$ 的两侧是左负右正, $f(x)$ 就是先减后增, 所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可以取到极小值, 而且 2 又是最小的正整数, 故选 B.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上)

13. 复数 $z=(1+i)+(-2+2i)$ 在复平面内对应的点位于第 _____ 象限.

答案:二

解析: $z=(1+i)+(-2+2i)=-1+3i$, 在复平面内对应的点为 $(-1,3)$, 在第二象限.

14. 已知 $f(x)=x+\ln(x+1)$, 那么 $f'(0)=$ _____.

答案:2

解析: $f'(x)=1+\frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0)=1+1=2$.

15. 我们知道: 在长方形 $ABCD$ 中, 如果设 $AB=a, BC=b$, 那么长方形 $ABCD$ 的外接圆的半径 R 满足: $4R^2=a^2+b^2$. 类比上述结论回答: 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 如果设 $AB=a, BC=b, AA_1=c$, 那么长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的半径 R 满足的关系式是 _____.

答案: $4R^2=a^2+b^2+c^2$.

解析: 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的半径 R 为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体对角线的一半.

16. 若函数 $f(x) = x^3 + (k-1)x^2 + (k+5)x - 1$ 在区间 $(0, 2)$ 上不单调, 则实数 k 的取值范围为_____.

答案: $(-5, -2)$

解析: 函数 $f(x) = x^3 + (k-1)x^2 + (k+5)x - 1$ 在区间 $(0, 2)$ 上不单调就等价于 $f'(x) = 3x^2 + 2(k-1)x + k+5$ 在 $(0, 2)$ 上有异号的零点, 那么接下来可以用两种方法处理, 一是利用二次函数零点的分布, 二是可以利用参变分离求交点, 两种方法都可以得到 $(-5, -2)$ 的结果.

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 48 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 8 分)

已知 $z_1 = 1 - i, z_2 = 2 + 2i$.

(1) 求 $z_1 \cdot z_2$;

(2) 若 $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$, 求 z .

解析: (1) $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(2+2i) = 2 + 2i - 2i - 2i^2 = 2 + 2 = 4$.

$$(2) z = \frac{1}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{4}{3+i} = \frac{6-2i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}i.$$

18. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值和最小值.

解析: (1) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2$

所以当 $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-\frac{2}{3}, 2)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (2, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

综上所述: 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{3})$ 和 $(2, +\infty)$

单调递减区间为 $(-\frac{2}{3}, 2)$.

(2) $f(-1) = 1$; $f(-\frac{2}{3}) = \frac{40}{27}$; $f(2) = -8$; $f(4) = 16$

结合 (1) 可得如下表格:

x	-1	$(-\frac{2}{3}, 2)$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, 2)$	2	(2,4)	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	单增	$\frac{40}{27}$	单减	-8	单增	16

由上可知, 当 $x \in [-1, 4]$, $f_{\max} = f(4) = 16$; $f_{\min} = f(2) = -8$.

19. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + \frac{1}{x+1}$, $x \in [0, 1]$.

(1) 用分析法证明: $f(x) \geq 1 - x + x^2$;

(2) 证明: $f(x) > \frac{3}{4}$.

解析: (1) 证明: 要证明 $x^3 + \frac{1}{x+1} \geq 1 - x + x^2$ 成立

只需证 $\frac{1}{x+1} \geq 1 - x + x^2 - x^3$ 成立

即只需证 $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1 - (-x)^4}{1 - (-x)}$ 成立

即只需证 $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1 - x^4}{1 + x}$ 成立

由 $x \in [0, 1]$ 可得上式显然成立, 故得证.

(2)证明: 由(1)可得 $f(x) \geq 1-x+x^2 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

又当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + \frac{2}{3} = \frac{19}{24} > \frac{3}{4}$, 即等号不成立.

故 $f(x) > \frac{3}{4}$, 得证.

20. (本小题满分 10 分)说明: 请考生在(A), (B)两小题中任选一题作答.

(A)已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = |\frac{a_n+2}{a_n-1}|$, 其中 $a_1=2$, $a_{n+1} = \frac{2}{a_n+1}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3 , 并猜想 b_n 的表达式(不必写出证明过程);

(2) 由(1)写出数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 并用数学归纳法证明.

解析: (1) $a_1=2$, $b_1 = |\frac{a_1+2}{a_1-1}| = 4$; $a_2 = \frac{2}{3}$, $b_2 = |\frac{a_2+2}{a_2-1}| = 8$; $a_3 = \frac{6}{5}$,

$$b_3 = |\frac{a_3+2}{a_3-1}| = 16.$$

猜想: $b_n = 2^{n+1}$.

$$(2) S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+2} - 4,$$

当 $n=1$ 时, $S_1 = 2^3 - 4 = 4$, 显然成立;

假设当 $n=k$ 时, $S_k = 2^{k+2} - 4$;

当 $n=k+1$ 时, $S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = 2^{k+2} - 4 + 2^{k+2} = 2^{k+3} - 4$, 故结论成立.

(B)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $2S_n - S_n S_{n-1} = 1 (n \geq 2)$.

(1) 猜想 S_n 的表达式, 并用数学归纳法证明;

(2) 设 $b_n = \frac{na_n}{1+30a_n}, n \in N^*$, 求 b_n 的最大值.

解析: (1) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{12}$, $a_4 = \frac{1}{20}$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $S_n = \frac{n}{n+1}$.

当 $n=1$ 时, $S_1 = \frac{1}{2}$, 显然成立;

假设当 $n=k$ 时, $S_k = \frac{k}{k+1}$;

当 $n=k+1$ 时, $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. 故结论成立.

(2) $b_n = \frac{na_n}{1+30a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{30}{n(n+1)}} = \frac{n}{n^2+n+30} = \frac{1}{n+\frac{30}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{30}+1}$ 当且仅当 $n = \sqrt{30}$ 时取

等, 而 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n=5$ 或 6 , b_n 的最大值为 $\frac{1}{12}$.

21. (本小题满分 10 分)说明: 请考生在(A), (B)两小题中任选一题作答.

(A) 设函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$, $a > 0$.

(1) 证明: $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

(2) 若方程 $f(x) - 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数根, 求实数 a 的值.

解析: (1) $f'(x) = 2x \cdot e^{ax} + x^2 \cdot e^{ax} \cdot a = e^{ax}(ax^2 + 2x)$, 由于 $a > 0, x > 0$, 所以 $ax^2 + 2x > 0$,

而且 $e^{ax} > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数

(2) 设 $g(x) = f(x) - 1$, 那么 $g'(x) = e^{ax}(ax^2 + 2x)$, 又因为 $a > 0$, 所以可知在

$\left(-\infty, -\frac{2}{a}\right)$ 上 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 在 $\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$ 上 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

在 $(0, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以要让 $g(x)$ 与 x 轴有且只有两个交点,

需要让极大值 $g\left(-\frac{2}{a}\right) = 0$, 可解得 $a = \frac{2}{e}$.

(B)

已知函数 $f(x) = (x^2 - x - \frac{1}{a})e^{ax} (a > 0)$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小值;

(2) 若存在唯一实数 x_0 使得 $f(x_0) + \frac{3}{a} = 0$ 成立, 求实数 a 的值.

解析: (1) $f'(x) = e^{ax}(ax+2)(x-1)$, 可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{2}{a}, 1)$

上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

而且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) = (x^2 - x - \frac{1}{a})e^{ax} > 0$, 所以可知当 $x=1$ 时, $f(1) = -\frac{1}{a}e^a < 0$ 为最小值.

(2) 设 $g(x) = f(x) + \frac{3}{a}$, 那么 $g'(x) = e^{ax}(ax+2)(x-1)$, 可知 $g(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ 上单

调递增, 在 $(-\frac{2}{a}, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

而且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) = (x^2 - x - \frac{1}{a})e^{ax} + \frac{3}{a} > 0$, 所以可知要让 $g(x)$ 与 x 轴有且只有一个零点, 则 $g(1) = 0$, 可解得 $a = \ln 3$.

更多的真题下载地址: <http://ty.xdf.cn>

咨询电话: 0351-3782999