太原市 2017 年高三年级模拟试题（三）

数学试卷（文史类）

一、选择题：

1. 已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $(1-i)z=i$，则 $|z|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

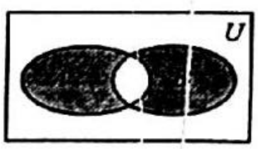
答案：B

考点：复数及其运算

解析：$\because\ z=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$\therefore\ |z|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x(x-2)<0\}$，$B=\{x||x|\le 1\}$，则下列阴影部分表示的集合是（　　）



A. $(0,1]$　　B. $(-2,-1)\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup(1,2)$　　D. $[-1,2)$

答案：C

考点：集合及其运算

解析：$\because\ x(x-2)<0\ \therefore\ 0<x<2$

$\therefore A=\{x|0<x<2\}\ B=\{x|-1\le x\le 1\}$

$\therefore A\cup B=\{x|-1\le x<2\}$，$A\cap B=\{x|0<x\le 1\}$

所以，阴影部分表示：$[-1,0]\cup(1,2)$

3. 已知 $p:a>|b|,q:a^2>b^2$，则下列结论正确的是（　　）

A. p 是 q 的充分不必要条件　　B. p 是 q 的必要不充分条件

C. p 是 q 的既不充分也不必要条件　　D. p 是 q 的充要条件

答案：A

考点：命题与逻辑

解析：由 $a>|b|\Rightarrow a^2>b^2$，但是 $a^2>b^2\neq a>|b|$

4. 我国古代数学名著《九章算术》的论割圆术中有："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"它体现了一种无限与有限的转化过程。比如在表达式 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$ 中 "…" 即代表无数次重复，但原式却是个定值，它可以通过方程 $1+\frac{1}{x}=x$ 求得 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。类比上述过程，则 $\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\cdots}}}=$（　　）

A. 　3　　　B. $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$　　　C. 　6　　　D. $2\sqrt{2}$

答案：A

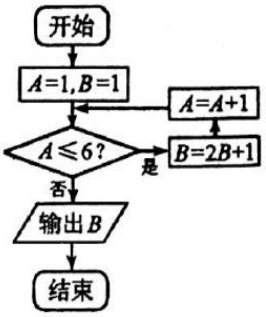
考点：推理与证明

解析：$\because \sqrt{3+2x}=x, \therefore 3+2x=x^2 \therefore x=-1$ 或 3

又 $\because >0, \therefore x=3 \therefore \sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\cdots}}}=3$

5. 执行右面的程序框图，则输出的 $B=$（　　）

A. 　31　　　B. 　63　　　C. 　127　　　D. 255



答案：C

考点：程序框图

解析：1、$A=1,B=1,$ 如果 $A\le 6$ 是， $B=2B+1=2\times 1+1=3, A=A+1=1+1=2$，

2、如果 $A\le 6$ 是， $B=2B+1=2\times 3+1=7, A=A+1=2+1=3$

以此类推……

6、如果 $A\le 6$ 是， $B=2B+1=2\times 63+1=127, A=A+1=6+1=7$

7、如果 $A\le 6$ 否，则输出的 $B=127$

6.在 ΔABC 中, $AB=3$, $AC=2$, $\angle BAC=60°$,点 P 是 ΔABC 内一点（含边界）,若 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$,则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$　　　B. $\frac{8}{3}$　　　C. $\frac{2\sqrt{19}}{3}$　　　D. $\frac{2\sqrt{13}}{3}$

答案： D

考点：向量的共线、向量的数量积

解析：由于 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$,且点 P 是 ΔABC 内一点（含边界）,不妨考虑点 P 的边界位置.则当点在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上时, λ 的值为 0 .当点 P 在线段 BC 上运动时, $0\le\lambda\le\frac{1}{3}$.又 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+2\times\frac{2\lambda}{3}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\times\frac{1}{2}+\lambda^2\times 4}=\sqrt{4\lambda^2+4\lambda+4}=2\sqrt{\lambda^2+\lambda+1}$.当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时,

$|AP|$ 最大,为 $\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

7 已知某产品的广告费用 x（单位：万元）与销售额 y（单位：万元）具有线性相关关系，其统计数据如下表：

X	3	4	5	6
Y	25	30	40	45

由上表可得线性回归方程 $y=\hat{b}x+a$，据此模型预报广告费用为 8 万元时的销售额是（ ）

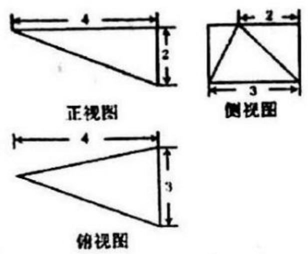
A .59.5　　B.52.5　　C.56　　D.63.5

答案：A

考点：线性回归方程

解析：$\bar{x}=\dfrac{9}{2}$，$\bar{y}=70$，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{4}x_i^2-n\bar{x}^2}=7, a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\dfrac{7}{2}$，$\therefore y=\hat{b}x+a=7x+\dfrac{7}{2}$,当 $x=8$ 时，y=59.5.

8.某几何体的三视图如图所示,则该几何体中最长的棱长为（ ）



$A.3\sqrt{3}$　　$B.2\sqrt{6}$　　$C.\sqrt{21}$　　$D.2\sqrt{5}$

答案：B

考点：三视图

解析：是由正方体切割形成的四棱锥,底在右侧面,上面与右侧面垂直,所有棱长为：2 ，2 ，3 ，3 ，$\sqrt{21}$ ，$\sqrt{17}$ ，$2\sqrt{5}$ ，$2\sqrt{6}$.故最长的棱为 $2\sqrt{6}$.

9 已知点 M,N 是平面区域 $\begin{cases}2x-y-4\le 0\\ x-2y+4\ge 0\\ x+y-2\ge 0\end{cases}$ 内的两个动点，$\vec{a}=(1,2)$，则 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{a}$ 的最大值为（ ）

A $2\sqrt{5}$　　B 10　　C 12　　D 8

答案：B

考点：线性规划

解析：由已知可以作出可行域，$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{a}=|\overrightarrow{MN}||\vec{a}|\cos\theta=\sqrt{5}|\overrightarrow{MN}|\cos\theta$,（$\theta$ 为 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角）

即求 $\overrightarrow{MN}$ 在 $\vec{a}$ 方向上投影的最大值，当 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\vec{a}$ 同向且 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$ 时取最大值，其中 $A=(2,0), B=(4,4)$

$\therefore(\overrightarrow{MN}\cdot\vec{a})_{\max}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{a}|=\sqrt{2^2+4^2}\times\sqrt{5}=10$.

10.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,点 $(n,S_n)(n\in N^*)$ 在函数 $y=x^2-10x$ 的图象上,等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n+b_{n+1}=a_n(n\in N^*)$,其前 n 项和为 T_n ,则下列结论正确的是（ ）

$A.S_n<2T_n$　　$B.b_4=0$　　$C.T_7>b_7$　　$D.T_5=T_6$

答案：D

考点：等差数列的通项、等差数列求和

解析：由题意：$S_n = a_n^{\ 2} - 10a_n$,可得 $a_n = 2n-11$.即：$b_n + b_{n+1} = 2n-11$,则等差数列 $\{b_n\}$ 的通项为 $b_n = n-6$,显然选项 D 正确.

11.已知函数 $f(x)$ 是偶函数，$f(x+1)$ 是奇函数，且对任意的 $x_1, x_2 \in [0,1]$，且 $x_1 \neq x_2$，都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$，设 $a = f(\frac{82}{11}), b = -f(\frac{50}{9}), c = f(\frac{24}{7})$，则下列结论正确的是（　）

A. $a > b > c$　　　B. $b > a > c$　　　C. $b > c > a$　　　D. $c > a > b$

答案：B.

考点：函数单调性，奇偶性

解析：因为函数 $f(x)$ 是偶函数，$f(x+1)$ 是奇函数，所以函数周期为 4

$$a = f(\frac{82}{11}) = f(-\frac{6}{11}), c = f(\frac{24}{7}) = f(-\frac{4}{7})$$

由对任意的 $x_1, x_2 \in [0,1]$，且 $x_1 \neq x_2$，都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$，$f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 单增，所以 $a > c$

又因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $b = -f(\frac{50}{9}) = -f(\frac{14}{9}) = -f(\frac{5}{9}+1) = f(\frac{4}{9}) = f(-\frac{4}{9})$，所以 $b > a > c$

12. 已知点 P 在抛物线 $y = x^2$ 上，点 Q 在圆 $(x-4)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 1$ 上，则 $|PQ|$ 的最小最为（　）

A. $\frac{3\sqrt{5}}{2} - 1$　　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$　　　C. $2\sqrt{3} - 1$　　　D. $\sqrt{10} - 1$

答案：A.

考点：圆锥曲线最值

解析：抛物线的参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ (t为参数)，所以 $P(t, t^2)$。圆心 $A(4, -\frac{1}{2})$

$$|PQ|_{\min} = |PA| - 1 = \sqrt{(4-t)^2 + (t^2 + \frac{1}{2})^2} - 1 = \sqrt{t^4 + 2t^2 - 8t + \frac{65}{4}} - 1$$

令 $g(t) = t^4 + 2t^2 - 8t + \frac{65}{4}$，求导，函数在 $t = 1$ 有极小值也就是最小值 $g(1) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$，所以 $|PQ|$ 的最小最为 $\frac{3\sqrt{5}}{2} - 1$

二、填空题：

13.已知方程 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + F = 0$ 表示半径为 2 的圆，则实数 $F =$ _______

答案：-2

考点：圆的方程

解析：由题可得 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + F = (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 - F = 4$，所以 $F = -2$

14.现采用随机模拟的方法估计某运动员射击击中目标的概率.先由计算器给出 0 到 9 之间取整数的随机数，指定 0，1，2，3 表示没有击中目标 4，5，6，7，8，9 表示击中目标，以 4 个随机数为一组，代表射击 4 次的结果，经随机模拟产生了 20 组如下的随机数：

7527	0293	7140	9857	0347	4373	8636	6947	1417	4698
0371	6233	2616	8045	6011	3661	9597	7424	7610	4281

根据以上数据估计该运动员射击四次至少击中三次的概率为:_________

答案：0.4

考点：概率的基本知识

解析：由题可得一共有 20 组随机数，符合要求的有 8 组，故该运动员射击四次至少击中三次的概率为 0.4

15.已知过点 $P(2,-2)$ 的直线 l 与曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-x$ 相切，则直线 l 的方程为________

答案：$y=-x$ 或 $y=8x-18$

考点：切线方程

解析：设直线与曲线的切点为 (x_0,y_0)，则曲线在 (x_0,y_0) 点处所对应的切线方程是 $y-y_0=(x_0^2-1)(x-x_0)$. 将 $P(2,-2)$ 代入到切线方程中可得 $x_0=0$ 或 $x_0=3$，即可得到切线方程.

16.在 ΔABC 中，$AB=2,AC=3,\angle BAC=90^\circ$，点 D 在 AB 上，点 E 在 CD 上，且 $\angle ACB=\angle DBE=\angle DEB$，则 $DC=$ ______

答案：$DC=\frac{13}{4}$

考点：二倍角公式

解析：由题可知 $\sin\angle CDA=2\angle DBE=2\angle ACB$

又 $\tan\angle ACB=\frac{2}{3}$，$\therefore\tan 2\angle ACB=\tan 2\angle CDA=\frac{12}{5}$，在 ΔACD 中，$DC=\frac{13}{4}$

三、解答题：

17.已知 $\vec{m}=(\sqrt{3}\sin\frac{x}{3},\cos\frac{x}{3}),\vec{n}=(\cos\frac{x}{3},\cos\frac{x}{3})$，$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心；

(Ⅱ) 若 a,b,c 分别是 ΔABC 内角 A,B,C 所对的边，且 $a=2,(2a-b)\cos C=c\cos B$，$f(A)=\frac{3}{2}$，求 c

考点：向量数量积与解三角形

解析：(Ⅰ) $\because f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}=\vec{m}=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}(\cos\frac{2x}{3}+1)=\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 3π

令 $\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in z$，则 $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}k\pi$

$\therefore f(x)$ 的对称中心 $(-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}k\pi,\frac{1}{2})\quad k\in z$

(Ⅱ) $\because(2a-b)\cos C=c\cos B$，$\therefore 2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin A$

$\because\sin A>0\quad\therefore\cos C=\frac{1}{2}\quad\therefore C=\frac{\pi}{3}$

又 $f(A)=\sin(\frac{2A}{3}+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\quad\therefore\quad\sin(\frac{2A}{3}+\frac{\pi}{6})=1$

$\therefore A=\frac{\pi}{2}\quad\therefore\quad c=\sqrt{3}$

18. 网购是当前民众购物的新方式，某公司为改进营销方式，随机调查了 100 名市民，统计其周平均网购的次数，并整理得到如下的

频数直方图。这 10 名市民中，年龄不超过 40 岁的有 65 人。将所抽样本中周平均网购次数不小于 4 次的市民陈为网购迷，且已知其中有 5 名市民的年龄超过 40 岁。

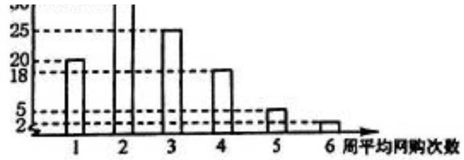
（1）根据已知条件完成下面的 2×2 列联表，能否在犯错的概率不超过 0.10 的前提条件下认为网购迷与年龄不超过 40 岁有关?

（2）现将所抽取样本中周平均网购次数不小于 5 次的市民称为超级网购迷，且已知超级网购迷中有有 2 名年龄超过 40 岁，若从超级网购迷中任意挑选 2 名，求至少有 1 名市民年龄超过 40 岁的概率。

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$；

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.01
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635

	网购迷	非网购迷	合计
年龄不超过 40 岁			
年龄超过 40 岁			
合计			



考点：统计与概率

解析：

（1）由题意可得列联表如下：

	网购迷	非网购迷	合计
年龄不超过 40 岁	20	45	65
年龄超过 40 岁	5	30	35
合计	25	75	100

假设网购迷与年龄不超过 40 岁没有关系，则 $k=\dfrac{100\times(20\times30-45\times5)^2}{65\times35\times25\times75}=3.297>2.706$ ，所以在犯错的概率不超过 0.10 的前提条件下认为网购迷与年龄不超过 40 岁有关。

（2）由频率分布直方图可知，超级网购迷共有 7 名，记其中年龄超过 40 岁的 2 名市民为 A_1 ，A_2 ，其余 5 名市民记为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ，

则从超级网购迷中任意选取 2 名的所有结果为：

$(A_1,\ ),(A_2\ ),(A_1\ )(a_1\ )(A_1\ )(a_2\ )(A_1\ )(a_3\ )(A_1\ )(a_4\ )(A_1\ ),(a_5\ )(A_2\ )(a_1\ )$
$(a_1,\ )(a_5,\ )(a_2,\ )(a_3,\ )(a_2,\ )(a_4,\ )(a_2,)\ a_5,\ a_3,\ a_4,\ a_3,\ a_5,\ a_4,\ a_5$

共有 21 种;

其中至少有 1 名市民年龄超过 40 岁的结果为：$(A_1,A_2),(A_1,a_1),(A_1,a_2),(A_1,a_3),(A_1,a_4),(A_1,a_5),(A_2,a_1),(A_2,a_2),(A_2,a_3),(A_2,a_4),(A_2,a_5)$，

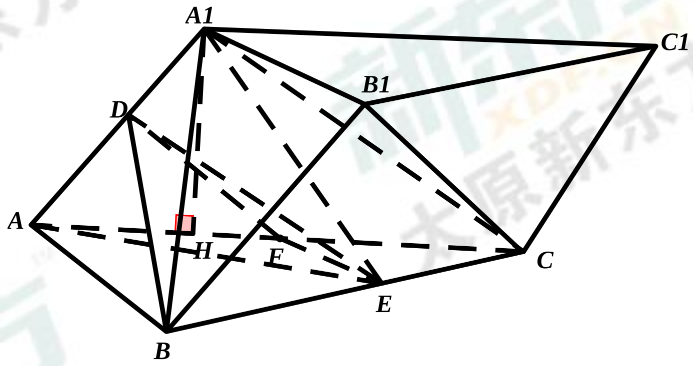
共有 11 种;

所以，从超级网购迷中任意挑选 2 名至少有 1 名市民年龄超过 40 岁的概率为 $P=\frac{11}{21}$ 。

19.如图，在三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $ACC_1A_1\perp$底面 ABC, $\angle A_1AC=60^{\circ}, AC=2AA_1=4$，点 D,E 分别是 AA_1,BC 的中点。

（Ⅰ）证明：DE//平面 A_1B_1C；

（Ⅱ）若 AB=2, $\angle BAC=60^{\circ}$, 求三棱锥 A_1-BDE 的体积。



考点：面面平行的判定定理，线面平行判定定理，三棱锥的体积公式

解析：（Ⅰ）证明：如图，取 AC 的中点 F，连接 DF,EF，

在 ΔAA_1C 中点 D,F 分别为 AA_1, AC 的中点，所以有 DF// $\frac{1}{2}A_1C$

同理得 EF// $\frac{1}{2}AB$ // $\frac{1}{2}A_1C_1$, $DF\cap EF=F, A_1C\cap A_1B_1=A_1$

所以平面 DFE//平面 A_1B_1C，又 DE$\subset$平面 DFE,所以 DE//平面 A_1B_1C

（Ⅱ）过点 A_1 做 AC 的垂线，垂足为 H，由题知，侧面 $ACC_1A_1\perp$底面 ABC，

故 $A_1H\perp$底面 ABC,在 ΔAA_1C 中，由 $\angle A_1AC=60^{\circ}, AC=2AA_1=4$，则 $A_1H=\sqrt{3}$

$\because AB=2, \angle BAC=60^{\circ}, \therefore BC=2\sqrt{3}$,点 E 是 BC 的中点，$\therefore BE=\sqrt{3}$, $S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$\because$ 点 D 为 AA_1 的中点

$\therefore V_{A_1-BDE}=V_{A_1-ABE}-V_{D-ABE}=\frac{1}{3}\cdot A_1H\cdot S_{\Delta ABE}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_1H\cdot S_{\Delta ABE}=\frac{1}{6}\cdot A_1H\cdot S_{\Delta ABE}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}$

20. 已知动圆 C 经过点 $(1,0)$，且与直线 $x=-1$ 相切，设圆心 C 的轨迹 E .

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 若直线 $l: y=kx+m(m\neq 0)$ 与曲线 E 相交于 A,B 两个不同点，以 AB 为直径圆经过原点，证明：直线 l 必过一个定点.

考点：圆锥曲线的轨迹方程，恒过定点问题;

解析：（1）由题易知，圆心 C 的轨迹为以 $(0,1)$ 为焦点 $x=-1$ 为准线的抛物线，且 $\frac{p}{2}=1$，所以曲线 E 的方程为 $y^2=4x$.

（2） 设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = kx + m \end{cases}$ 得 $k^2x^2 + (2km-4)x + m^2 = 0$

则有 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$　$x_1 + x_2 = \dfrac{4-2km}{k^2}, x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^2}{k^2}$.

因为 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$，所以有 $x_1x_2 + y_1y_2 = (1+k^2)x_1x_2 + km(x_1+x_2) + m^2 = \dfrac{m^2+4km}{k^2} = 0$

所以 $m = 0$ 舍去或 $m = -4k$，满足 $\Delta = 16(1-km) > 0$.

所以直线 l 的方程为 $y = k(x-4)$，即 l 过定点 $(4,0)$.

21. 已知函数 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2a\ln x + 1 (a \in R)$

(1)求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极值；

(2)当 $a = e$ 时，是否存在实数 k, m，使得不等式 $g(x) \le kx + m \le f(x)$ 恒成立？若存在，请求出实数 k, m 的值；若不存在，请说明理由.

考点：导数含参单调性，不等式恒成立的证明.

解析：(1)　$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2a\ln x, x > 0$

$h'(x) = \dfrac{2(x^2-a)}{x}$

当 $a \le 0$ 时，$h'(x) > 0, \therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a > 0$ 时，令 $h'(x) > 0$, 即 $x^2 - a > 0, \therefore x > \sqrt{a}$ 或 $x < -\sqrt{a}$（舍去）

令 $h'(x) < 0$, 即 $x^2 - a < 0, \therefore 0 < x < \sqrt{a}$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 单调递增，

$\therefore h(x)$ 的极小值为 $h(\sqrt{a}) = a - 2a\ln\sqrt{a} = a - a\ln a$，无极大值；

(2) 当 $a = e$ 时，$h(\sqrt{a}) = h(\sqrt{e}) = e - e\ln e = 0$，此时 $h(x) = f(x) - g(x) = 0$

$\therefore f(x) - g(x) \ge 0$ 当且仅 $x=\sqrt{e}$ 当时，等号成立；

$\because f'(x) = 2x, f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}, g'(x) = \dfrac{2e}{x}, g'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}$

$\therefore f'(\sqrt{e}) = g'(\sqrt{e})$ 且在 $x=\sqrt{e}$ 处 $f(\sqrt{e}) = g(\sqrt{e}) = e+1$

即在 $x=\sqrt{e}$ 时，$y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有公切线，切线方程为 $y = 2\sqrt{e}x + 1 - e$

此时 $g(x) = 2\sqrt{e}x + 1 - e = f(x)$，满足 $g(x) \le kx + m \le f(x)$ 恒成立，

$\therefore k = 2\sqrt{e}, m = 1 - e$.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$

I 求曲线 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

II 已知曲线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha\ \ 0<\alpha<\pi,\rho\in R$，点 A 是曲线 C_3 与 C_1 的交点，点 B 是曲线 C_3 与 C_2 的交点，且 A,B 均异于原点 O，且 $|AB|=4\sqrt{2}$，求实数 α 的值.

考点：参数方程和普通方程互化，极坐标方程和直角坐标方程互化，极坐标中极径的意义

解析： I 由 $\begin{cases} x=2+2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$ 消参得 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$

$\because\ \rho=4\sin\theta\quad \therefore \rho^2=4\rho\sin\theta$ 即得 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+\ y-2\ ^2=4$

II 将 C_1：$(x-2)^2+y^2=4$ 化为极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$

设 $A\ \ \rho_1,\alpha\ \ ,\ \ B\ \ \rho_2,\alpha$

由题可得 $|AB|=|\rho_1-\rho_2|=|4\sin\alpha-4\cos\alpha|=4\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|=4\sqrt{2}$

$\therefore\ \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\pm1$

$\because\ \ 0<\alpha<\pi\quad \therefore\ \ -\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}\quad \therefore\ \alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选将

已知函数 $f(x)=2|x+a|+\left|x-\frac{1}{a}\right|(a\neq0)$。

（1）当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x)<4$；

（2）求函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 的最小值。

考点：含绝对值的不等式，三角不等式的应用

解析：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=2|x+1|+|x-1|=\begin{cases} 3x+1, x\geq1 \\ x+3,-1\leq x<1 \\ -3x-1, x<-1 \end{cases}$，解下列不等式：

$\begin{cases} 3x+1<4 \\ x\geq1 \end{cases}\Rightarrow\varnothing;\begin{cases} x+3<4 \\ -1\leq x<1 \end{cases}\Rightarrow-1\leq x<1;\begin{cases} -3x-1<4 \\ x<-1 \end{cases}\Rightarrow-\frac{5}{3}<x<-1$，综上可得原不等式的解集为: $\{x|-\frac{5}{3}<x<1\}$。

（2）$g(x)=f(x)+f(-x)=2|x+a|+\left|x-\frac{1}{a}\right|+2|x-a|+\left|x+\frac{1}{a}\right|=2(|x+a|+|a-x|)+(\left|\frac{1}{a}-x\right|+\left|x+\frac{1}{a}\right|)$

$\geq2(|x+a+a-x|)+\left|\frac{1}{a}-x+x+\frac{1}{a}\right|=4|a|+2\left|\frac{1}{a}\right|\geq4\sqrt{2}$，

当且仅当 $2|a|=\left|\frac{1}{a}\right|$，即 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取 $g(x)$ 最小值为 $4\sqrt{2}$ 。