# 2017 高考全国卷 II 理科数学试题及答案

一．选择题

1. $\dfrac{3+i}{1+i}=$ （D）

A.$1+2i$　　B.$1-2i$　　C.$2+i$　　D.$2-i$

2.设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则 $B=$ （C）

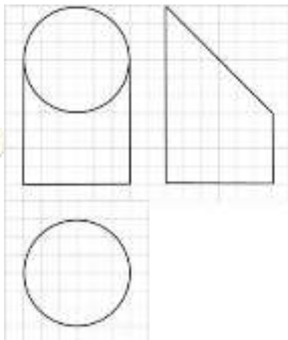
A.$\{1,-3\}$　　B.$\{1,0\}$　　C$\{1,3\}$　　D$\{1,5\}$

3.我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加赠，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的灯层共有灯 （B）

A.1盏　　B.3盏　　C.5盏　　D.9盏

4.如图网络纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截取一部分所得，则该几何体的体积为 （B）

A.$90\pi$　　B.$63\pi$　　C.$42\pi$　　D.$36\pi$



5.设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le 0,\\ 2x-3y+3\ge 0,\\ y+3\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是 （A）

A.$-15$　　B.$-9$　　C.1　　D.9

6.安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有 （D）

A.12 种　　B.18 种　　C.24 种　　D.36 种

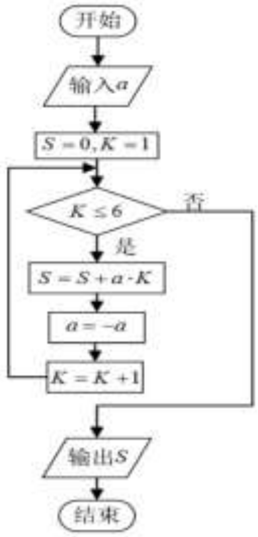
7.甲，乙，丙，丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩.老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看已、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩，看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩。根据以上信息，则 （D）

A. 乙可以知道四人的成绩　　B. 丁可以知道四人的成绩

C. 乙、丁可以知道对方的成绩　　D. 乙、丁可以知道自己的成绩

8.执行右面的程序框图，如果输入的$a=-1$，则输出的$S=$ （B）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5




9.若双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线被圆$(x-2)^2+y^2=4$所截得的炫长为2，则$C$的离心率为 （A）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10.已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=120°,AB=2$，$BC=CC_1=1$,则异面直线$AB_1$与$BC_1$所成角的余弦值为 （C）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11.若$x=-2$是函数$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$的极值点，则$f(x)$极小值为 （A）

A. $-1$　　B. $-2e^{-3}$　　C. $5e^{-3}$　　D. 1

12.已知$\Delta ABC$是边长为2的等边三角形，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是 （B）

A. $-2$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. $-1$

二．填空题

13.一批产品的二等品率为0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回的抽取100次，$\chi$表示抽到的二等品件数，则$D\chi=$_1.96_____

14.函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}(x\in[0,\frac{\pi}{2}])$ 的最大值是 __1__

15.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n$， $a_3=3,S_4=10$，则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$ __$\frac{2n}{n+1}$____

16.已知 F 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N，若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$ __6___ .

三．简答题

17.（12 分）

$\Delta ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$, $\Delta ABC$ 的面积为 2.求 b .

解：（1）$\sin B=8\times\frac{1-\cos B}{2}=4-4\cos B$

代入 $\sin B^2+\cos B^2=1$ 得：

$$17\cos B^2-32\cos B+15=0$$

解得：$\cos B=\frac{15}{17}$

(2)由第（1）问得 $\sin B=\frac{8}{17}$

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\times\frac{8}{17}=2\text{ 得 }ac=\frac{17}{2}$$

由已知 a+c=6

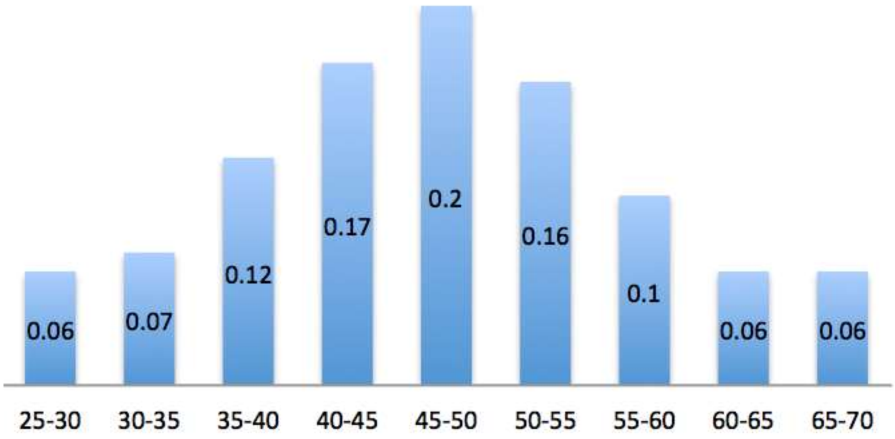
$$a^2+c^2=(a+c)^2-2ac=36-17=19$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=19-2\times\frac{17}{2}\times\frac{15}{17}=10-15=4$$

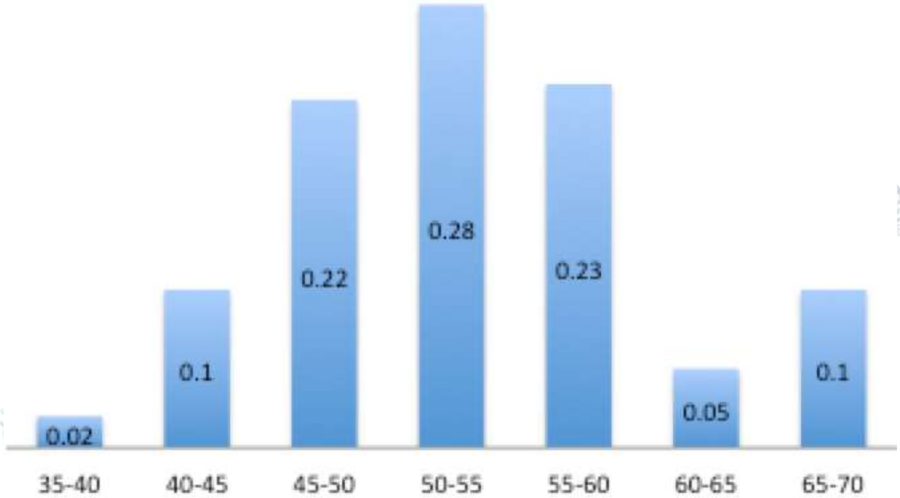
$$b=2$$

18.（12 分）

海水养殖场进行某水产的新、旧网箱养殖方法的产量对比。收货时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如下：




（旧养殖法）




（新养殖法）

(1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件"旧养殖法的箱产量低于 50kg，新养殖法的箱产量不低于 50kg".估计 A 的概率；

(2) 填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关；

| | 箱产量 $<50$kg | 箱产量 $\geq 50$kg |
|---|---|---|
| 旧养殖法 | | |
| 新养殖法 | | |

(3) 根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到 0.01）.

| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

【答案】(1)设事件$A_1$:旧养殖法的箱产量低于 50$kg$，事件$A_2$:新养殖法的箱产量不低于 50$kg$，则

$P(A_1) = 0.06 + 0.07 + 0.12 + 0.17 + 0.2 = 0.62$

$P(A_2) = 0.34 + 0.23 + 0.05 + 0.04 = 0.66$

所以$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0.62 \times 0.66 = 0.4092$

（2）完成联表：

| | 箱产量$< 50kg$ | 箱产量$\geq 50kg$ | 总计 |
|---|---|---|---|
| 旧养殖法 | 62 | 38 | 100 |
| 新养殖法 | 34 | 66 | 100 |
| 总计 | 96 | 104 | 200 |

$k^2 = \frac{200(62\times66-34\times38)^2}{100\times100\times96\times104} = 15.705 > 6.635$，有99%的把握认为箱产量与养殖方法有关.

（3）设中位数为$x$，则有$0.34 + (x - 50) \times 0.068 = 0.5$，则$x = 52.35$

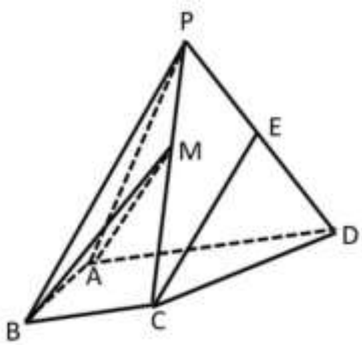
19.（12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，侧面$PAD$为等边三角形且垂直于底面$ABCD$,

$AB = BC = \frac{1}{2}AD$, $\angle BAD = \angle ABC = 90°$, E 是 PD 的中点。

(1) 证明：直线$CE$ // 平面$PAB$;

(2) 点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 ABCD 所成角为 45°，求二面角$M-AB-D$的余弦值。




解：(1)取 PA 中点 F，连接 EF，BF

∵E 是 PD 中点　　∴ EF ∥ AD，$EF = \frac{1}{2}AD$

∴EF 平行且等于 BC

∴四边形 EFBC 为平行四边形

∴CE // BF

∵BF∈平面 PAB

∴CE∥平面 PAB

（2）以 AD 中点为原点 O，OC 为 x 轴，OD 为 y 轴，OP 为 z 轴建立直角坐标系，B（1，-1，0），P（0，0，$\sqrt{3}$），C（1，0，0）

$\overrightarrow{PC}$=(1，0，-$\sqrt{3}$)

$\overrightarrow{PM}$=（λ，0，$\sqrt{3}$λ）

∴M(λ，0，$\sqrt{3}-\sqrt{3}$λ),$\overrightarrow{BM}$=(λ − 1，1，$\sqrt{3}-\sqrt{3}$λ)，

平面 ABCD 法向量$\vec{n}=(0,0,1)$

$∴\lambda=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$∴M(\frac{2-\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2})$

$\overrightarrow{MB}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{\sqrt{6}}{2})$

$\overrightarrow{AB}$=（1，0，0）

平面 MAB 法向量$\vec{n}_1=(0,-\sqrt{6},2)$，平面 ABD 法向量$\vec{n}_2=(0,0,1)$

$∴\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$

20.设 o 为坐标原点,动点 M 在椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过点 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$

(1)求点 P 的轨迹方程。

(2)设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$， 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 L 过椭圆的左焦点 F。

解：(1)设点 $P(x,y)$,依题意得 $N(x,0)$，

$\because\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$,故设 $M(x,y_0)$，

得 $(0,y)=\sqrt{2}(0,y_0)$，故 $y=\sqrt{2}y_0$，

又点 $M(x,y_0)$ 在 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，

得 P 的轨迹方程 $x^2+y^2=2$.

(2)依题，设 $Q(-3,\ y_Q),P(x_1,y_1)$，

$\because\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$

$\therefore(x_1,y_1)\cdot(-3-x_1,y_Qy_1-y_1^2)=1$

得 $-3x_1+y_Qy_1=3$，

$k_{OQ}=\frac{y_Q}{-3}$ $\because L\perp OQ$ $\therefore k_L=\frac{3}{y_Q}$

$\therefore$ 直线 $L$ 的方程为 $y-y_2=\frac{3}{y}(x-x_2)$

$\because$ 椭圆左焦点为 $F(-1,0)$，

将 $x=-1$ 代入，

整理得 $y=\frac{-3-3x_1+y_1y_Q}{y_Q}=0$

故直线 $L$ 过左焦点 $F$.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geq 0$.

（1）求 $a$ 的值；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一极大值点 $x_0$，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

【答案】（1）$\because f(1)=0$,

只需 $f(1)'=0$, $f(x)'=2ax-a-1-\ln x$

$\therefore 2a-a-1=0$,

$\therefore a=1$

（2）本题利用二次求导确定函数的单调性，进而确定极值点.

证明：由（1）可知，$f(x)=x^2-x-x\,ln\,x$

$$f'(x)=2x-2-ln\,x$$

令 $g(x)=f'(x)$，令 $g'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}=0$，$x=\frac{1}{2}$.

$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 单调递减，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增.

又因为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1-ln\frac{1}{2}<0$，$f(1)=0$

所以在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上存在 $x_0$，使得 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

所以存在唯一极大值点 $x_0$.

因为 $\frac{1}{e}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

所以 $f(x_0)>f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}$

又因为 $f'(x_0)=0$

所以 $2x_0-2=ln\,x_0$

所以$f(x_0)=x_0^2-x_0-x_0\ln x_0=-x_0^2+x_0$

因为$x_0\in(0,\frac{1}{2})$

所以$f(x_0)<f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，即$e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

**选考题：共 10 分。请考生在第 22, 23 题中任选一题作答。如果多做，则按第一题计分。**

22. 直角坐标系中，以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_1$的极坐标方程为$\rho\cos\theta=4$.

（1）点$M$为曲线$C_1$上一个动点，$P$在$OM$上，且$|OM||OP|=16$，求$P$轨迹的直角坐标方程$C_2$；

（2）设点$A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$B$在曲线$C_2$上，求三角形$OAB$面积的最大值.

答案：（1）设点 P 的极坐标为$(\rho,\theta)$,点 M 的极坐标为$(\rho',\theta)$

$$\therefore\ \rho'=\frac{4}{\cos\theta}$$

$$\because\ |OM|\cdot|OP|=16\ \therefore\ \rho'\cdot\rho=16\text{即}\ \frac{4}{\cos\theta}\cdot\rho=16$$

$\therefore$ 点 P 的极坐标方程为 $\dfrac{\rho}{\cos\theta}=4$

$\therefore$ 点 P 的直角坐标方程为：$x^2+y^2-4x=0\ \ (x\neq 0)$

（2）$\because$ 点 B 在曲线$C_2$上，点 A 的极坐标为$\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ 设点 B$(2+2\cos\theta,2\sin\theta)$,　　　$A(1,\sqrt{3})$

$$\therefore\ S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|2\sin\theta-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cos\theta\right|=\frac{1}{2}\left|4\sin(\theta-\frac{\pi}{3})-2\sqrt{3}\right|$$

$$\therefore\ S_{\Delta OAB}\max=2+\sqrt{3}$$

23. 设$a>0,b>0,a^2+b^2=2,a,b\in R$.

证明：（1）$(a+b)(a^5+b^5)\geq 4$；

（2）$a+b\leq 2$.

证明：（1）$(a+b)(a^5+b^5)=a^6+b^6+ab^5+ba^5$

$$=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3+ab(a^4+b^4)=(a^3+b^3)^2+ab(a^4+b^4-2a^2b^2)$$

$$=(a^3+b^3)^2+ab(a^2-b^2)^2 \geq 4$$

（2）$\because\ a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]=2$

设 $a+b=t$

$\therefore\ t^2-3ab=\dfrac{2}{t}\quad \therefore\ t^2-\dfrac{2}{t}=3ab\leq\dfrac{3(a+b)^2}{4}=\dfrac{3}{4}t^2$

$\therefore\ t^3\leq 8$ 即 $t\leq 2\quad \therefore\ a+b\leq 2$