第二十二届华罗庚金杯少年数学邀请赛

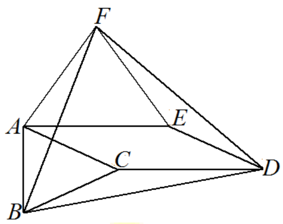
决赛试题（初中一年级组）

（时间: 2017 年 3 月 11 日 10:00～11:30）

一、填空题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 数轴上10个点所表示的数分别为$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$，且当i为奇数时，$a_{i+1}-a_i=2$，当i为偶数时，$a_{i+1}-a_i=1$，那么$a_{10}-a_6=$______.

2. 如右图，$\triangle ABC$，$\triangle AEF$和$\triangle BDF$均为正三角形，且$\triangle ABC$，$\triangle AEF$的边长分别为3和4，则线段DF长度的最大值等于______.



3. 如下的代数和

$$-1\times 2016+2\times 2015-\cdots+(-1)^m m\times(2016-m+1)+\cdots+1010\times 1007$$

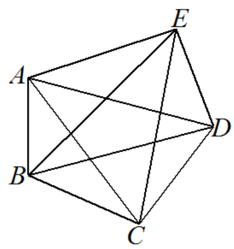
的个位数字是______，其中m是正整数.

4. 已知$2015<x<2016$．设$[x]$表示不大于x的最大整数，定义$\{x\}=x-[x]$.如果$\{x\}\times[x]$是整数，则满足条件的所有x的和等于________.

5. 设x, y, z是自然数，则满足$x^2+y^2+z^2+xy=36$的x, y, z有______组.

6. 设p，q，$\dfrac{3p-1}{q}$，$\dfrac{q-1}{p}$都是正整数，则p^2+q^2的最大值等于______.

7. 右图是A, B, C, D, E五个防区和连接这些防区的10条公路的示意图．已知每一个防区驻有一支部队．现在这五支部队都要换防，且换防时，每一支部队只能经过一条公路，换防后每一个防区仍然只驻有一支部队，则共有_______种不同的换防方式.



8. 下面两串单项式各有2017个单项式:

(1) $xy^2, x^4y^5, x^7y^8, \cdots, x^{3n-2}y^{3n-1}, \cdots, x^{6046}y^{6047}, x^{6049}y^{6050}$;

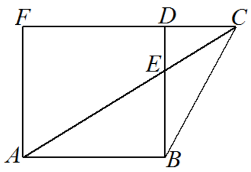
(2) $x^2y^3, x^7y^8, x^{12}y^{13}, \cdots, x^{5m-3}y^{5m-2}, \cdots, x^{10077}y^{10078}, x^{10082}y^{10083}$,

其中 n, m 为正整数, 则这两串单项式中共有______对同类项.

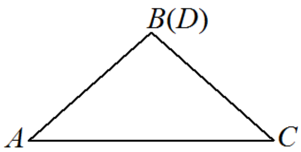
二、解答下列各题（每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程）

9. 是否存在长方体, 其十二条棱的长度之和、体积、表面积的数值均相等? 如果存在, 请给出一个例子; 如果不存在, 请说明理由.

10. 如右图, 已知正方形 $ABDF$ 的边长为 6 厘米, $\triangle EBC$ 的面积为 6 平方厘米, 点 C 在线段 FD 的延长线上, 点 E 为线段 BD 和线段 AC 的交点. 求线段 DC 的长度.



11. 如右图, 先将一个菱形纸片沿对角线 AC 折叠, 使顶点 B 和 D 重合. 再沿过 A, B (D) 和 C 其中一点的直线剪开折叠后的纸片, 然后将纸片展开. 这些纸片中菱形最多有几个? 请说明理由.



12. 证明: 任意5个整数中, 至少有两个整数的平方差是7的倍数.

三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 直线 a 平行于直线 b, a 上有10个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$, b 上有11个点 $B_1, B_2, \cdots$, B_{11}, 用线段连接 A_i 和 B_j (i=1,⋯,10, j=1,⋯,11), 所得到的图形中一条边在 a 上或者在 b 上的三角形有多少个?

14. 已知关于 x, y 的方程 $x^2 - y^2 + k = 2017$ 有且只有六组正整数解, 且 $x \ge y$, 求 k 的最大值.