

2018 届高三第一学期总第四次调研诊断测试 数学试题 (理) (晋豫名校联考)

考试时间: 120 分钟 满分: 150 分 命题: 特聘专家

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

C 1. 已知集合 $A = \{x | (x-1)(x-3)(x-5) < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | -2 < x < 6\}$, 则 $A \cap B$ 的元素的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

B 2. 设 i 为虚数单位, 若复数 $z = \frac{a}{1-2i} + i (a \in \mathbb{R})$ 的实部与虚部互为相反数, 则 $a =$ ()

A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. -1 D. -5

D 3. 下列函数中, 既是偶函数, 又在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增的为 ()

A. $y = x^4 + 2x$

B. $y = 2^{|x|}$

C. $y = 2^x - 2^{-x}$

D. $y = \log_{\frac{1}{2}} |x| - 1$

D 4. 若不等式组 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 2x, \\ kx - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域是一个直角三角形,

则该直角三角形的面积是 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{1}{4}$

A 5. 执行如图所示的程序框图, 则输出 S 的值为 ()

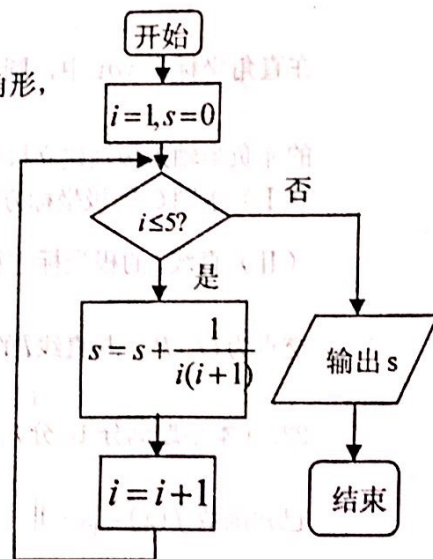
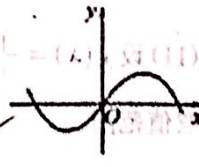
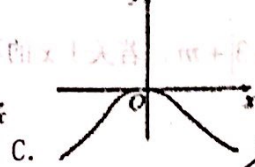
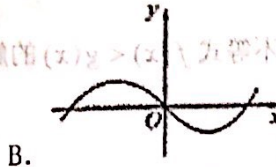
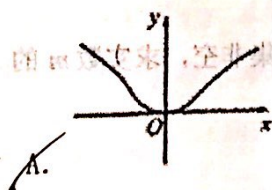
A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{6}{7}$

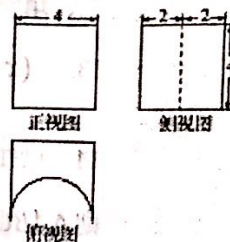
D. $\frac{7}{8}$

B 6. 函数 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1\right) \cos x$ 的图象的大致形状是 ()



7. 某几何体的三视图如图所示, 其中俯视图下半部分是半径为 2 的半圆, 则该几何体的表面积是 ()

A. $80+8\pi$ B. $80+4\pi$ C. $80-8\pi$ D. $80-4\pi$

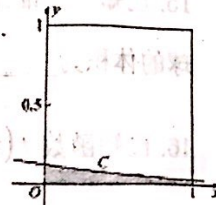


8. 在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点, 则落入阴影部分 (曲线 C 为正态分布 $N(-1,1)$ 的密度曲线) 的点的个数的估计值为 ()

(附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$.)

A. 906 B. 2718 C. 1359 D. 3413



9. 把函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 图像上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$

倍 (纵坐标不变), 再将图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 那么所得图像的一条对称轴方程为 ()

A. $x = -\frac{\pi}{2}$ B. $x = -\frac{\pi}{4}$ C. $x = \frac{\pi}{8}$ D. $x = \frac{\pi}{4}$

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $|F_1F_2| = 2c$, 点 A 在椭圆上,

$\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{F_1F_2} = 0$, $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = c^2$, 则椭圆的离心率 $e =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 若对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 3$, 则函数 $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} + f(x)$ 在

$[-2017, 2017]$ 上的最大值与最小值的和为 ()

A. 4 B. 6 C. 9 D. 12

12. 已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 且对任意的实数 x 都有

$f'(x) = e^x(2x+3) + f(x)$ (e 是自然对数的底数), $f(0) = 1$; 若不等式 $f(x) - k < 0$ 的

解集中恰有两个整数, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $[-\frac{1}{e}, 0)$ B. $(-\frac{1}{e}, 0]$ C. $(-\frac{1}{e^2}, 0]$ D. $[-\frac{1}{e^2}, 0]$



二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $(x+1)^3 + (x-2)^8 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_8(x-1)^8$, 则 $a_6 =$ _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 = b^2 + c^2 - bc, bc = 16$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

15. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $BC \perp CD, AB = AD = \sqrt{2}, BC = 1, CD = \sqrt{3}$, 则该三棱锥外接球的体积为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ f(x-1) + 1, & x > 0 \end{cases}$, 把方程 $f(x) - x = 0$ 的根按从小到大顺序排成一个数列, 则该数列的前 n 项和 $S_n =$ _____.

三、解答题

17. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分) 已知 2 件次品和 3 件正品放在一起, 现需要通过检测将其区分, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

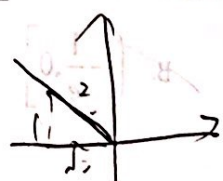
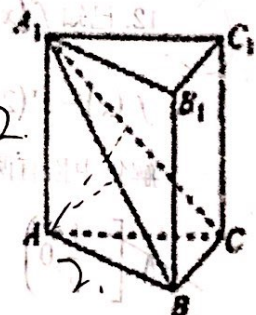
(I) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率;

(II) 已知每检测一件产品需要费用 100 元, 设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用 (单位: 元), 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

19. (本小题满分 12 分) 如图所示, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC \perp$ 侧面 A_1B_1BA , 且 $AA_1 = AB = 2$.

(I) 求证: $AB \perp BC$;

(II) 若直线 AC 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\frac{1}{2}$, 求锐二面角 $A-A_1C-B$ 的大小.



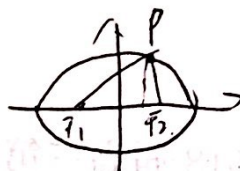
$$-4 = \sqrt{m^2 + 4} \cdot \sqrt{6} \quad -2\sqrt{2} = \sqrt{m^2 + 12} \quad 8 = 3m^2 + 12$$

$$10 = \sqrt{m^2 + 4}$$

$$\frac{2}{m^2 + 4} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5}$$





$$\frac{2m^2 - 8m + 4}{2}$$

20. (本小题满分 12 分) 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点.

(I) 若 P 是第一象限内该椭圆上的一点, 且满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -\frac{5}{4}$, 求点 P 的坐标;

(II) 设过定点 $M(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A, B , 且 $\angle AOB$ 为锐角 (其中 O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 2\ln x - 2mx + x^2 (m > 0)$

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $m \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 且 A, B 横坐标分别为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0 , 且 x_1, x_2 恰为函数

$$h(x) = \ln x - cx^2 - bx \text{ 的零点, 求证: } (x_1 - x_2)h'(x_0) \geq -\frac{2}{3} + \ln 2.$$

请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 若多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程 $\begin{cases} x = 1 + \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数})$. 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求圆 C 的极坐标方程;

(II) 直线 l 的极坐标方程是 $\rho(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) = 3\sqrt{3}$, 射线 $OM: \theta = \frac{\pi}{3}$ 与圆 C 的交点为 O, P , 与直线 l 的交点为 Q , 求线段 PQ 的长.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - 1|$

(I) 求不等式 $f(x) + x^2 - 1 > 0$ 的解集;

(II) 设 $g(x) = -|x + 3| + m$, 若关于 x 的不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集非空, 求实数 m 的取值范围.



2018 届高三第一学期总第四次调研诊断测试
数学(理)评分细则(晋豫名校联考)

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	D	D	A	B	B	C	A	C	B	C

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 28

14. $4\sqrt{3}$

15. $\frac{4\pi}{3}$

16. $\frac{n(n-1)}{2}$

三、解答题

17. (本小题满分 12 分)

【解析】(I) 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$.

所以 $a_1 = 11$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 8n - 3(n-1)^2 - 8(n-1) = 6n + 5$$

又 $a_n = 6n + 5$ 对 $n = 1$ 也成立, 所以 $a_n = 6n + 5$.

又因为 $\{b_n\}$ 是等差数列, 设公差为 d , 则 $a_n = b_n + b_{n+1} = 2b_n + d$.

当 $n = 1$ 时, $2b_1 = 11 - d$; 当 $n = 2$ 时, $2b_2 = 17 - d$,

解得 $d = 3$, 所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \frac{a_n - d}{2} = 3n + 1$.

(II) 由 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n} = \frac{(6n + 6)^{n+1}}{(3n + 3)^n} = (3n + 3) \cdot 2^{n+1}$,

于是 $T_n = 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^4 + \dots + (3n + 3) \cdot 2^{n+1}$,

两边同乘以 2, 得 $2T_n = 6 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^4 + \dots + (3n) \cdot 2^{n+1} + (3n + 3) \cdot 2^{n+2}$,

两式相减, 得

$$-T_n = 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + 3 \cdot 2^{n+1} - (3n + 3) \cdot 2^{n+2}$$

$$= 3 \cdot 2^2 + \frac{3 \cdot 2^2(1 - 2^n)}{1 - 2} - (3n + 3) \cdot 2^{n+2}$$

$$T_n = -12 + 3 \cdot 2^2(1 - 2^n) + (3n + 3) \cdot 2^{n+2} = 3n \cdot 2^{n+2}$$

18. (本小题满分 12 分)

【解析】(I) 记“第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品”为事件 A .

$$P(A) = \frac{A_1 \cdot \bar{A}_2}{A_1} = \frac{3}{10}$$

(II) X 的可能取值为 200, 300, 400

$$P(X = 200) = \frac{A_1}{A_1} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 300) = \frac{A_1 + C_2^1 C_1^1 A_2}{A_1} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 400) = 1 - P(X = 200) - P(X = 300) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

故 X 的分布列为

X	200	300	400
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$EX = 200 \times \frac{1}{10} + 300 \times \frac{3}{10} + 400 \times \frac{6}{10} = 350$$



19. (本小题满分 12 分)

试题解析: (1) 证明: 如图, 取 A_1B 的中点 D , 连接 AD 1 分

因 $AA_1 = AB$, 则 $AD \perp A_1B$, 2 分

由平面 $ABC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 , 且平面 $ABC \cap$ 侧面 $A_1ABB_1 = AB$, 3 分

得 $AD \perp$ 平面 A_1BC , 又 $BC \subset$ 平面 A_1BC ,

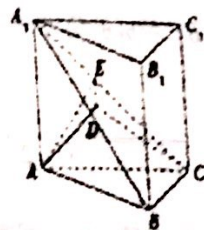
所以 $AD \perp BC$ 4 分

因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

则 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 所以 $AA_1 \perp BC$.

又 $AA_1 \cap AD = A$, 从而 $BC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 ,

又 $AB \subset$ 侧面 A_1ABB_1 , 故 $AB \perp BC$ 6 分



(2) 解法一: 连接 CD , 由 (1) 可知 $AD \perp$ 平面 A_1BC , 则 CD 是 AC 在平面 A_1BC 内的射影,

$\therefore \angle ACD$ 即为直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角, 因为直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角的正弦值为 $\frac{1}{2}$, 则

$$\angle ACD = \frac{\pi}{6}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

在等腰直角 $\triangle A_1AB$ 中, $AA_1 = AB = 2$, 且点 D 是 A_1B 中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2} A_1B = \sqrt{2} \text{ 且 } \angle ADC = \frac{\pi}{2}, \angle ACD = \frac{\pi}{6}, \therefore AC = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

过点 A 作 $AE \perp A_1C$ 于点 E , 连接 DE ,

由 (1) 知 $AD \perp$ 平面 A_1BC , 则 $AD \perp A_1C$, 且 $AE \cap AD = A$,

$\therefore \angle AED$ 即为二面角 $A - A_1C - B$ 的一个平面角 10 分

$$\text{且直角 } \triangle A_1AC \text{ 中, } AE = \frac{A_1A \cdot AC}{A_1C} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{又 } AD = \sqrt{2}, \angle ADE = \frac{\pi}{2}, \therefore \sin \angle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且二面角 } A - A_1C - B \text{ 为锐二面角,}$$

$$\therefore \angle AED = \frac{\pi}{3}, \text{ 即二面角 } A - A_1C - B \text{ 的大小为 } \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二 (向量法): 由 (1) 知 $AB \perp BC$ 且 $BB_1 \perp$ 底面 ABC , 所以以点 B 为原点, 以 BC 、 BA 、 BB_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $B - xyz$, 如图所示, 且设 $BC = a$, 则

$$A(0, 2, 0), B(0, 0, 0), C(a, 0, 0), A_1(0, 2, 2),$$

$$\overrightarrow{BC} = (a, 0, 0), \overrightarrow{BA_1} = (0, 2, 2), \overrightarrow{AC} = (a, -2, 0), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$$

2/5



设平面 A_1BC 的一个法向量 $n_1 = (x, y, z)$,

由 $\overrightarrow{BC} \perp n_1, \overrightarrow{BA_1} \perp n_1$ 得,

$$\begin{cases} za = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = 1, \text{ 得 } x = 0, z = -1, \text{ 则 } n_1 = (0, 1, -1) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 θ , 则 $\theta = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{得 } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot n_1|}{|\overrightarrow{AC}| |n_1|} = \frac{|-2|}{\sqrt{4+a^2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } a = 2, \text{ 即 } \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又设平面 A_1AC 的一个法向量为 n_2 , 同理可得 $n_2 = (1, 1, 0)$

设锐二面角 $A-A_1C-B$ 的大小为 α , 则

$$\cos \alpha = \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{1}{2}, \text{ 且 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 得 } \alpha = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$\therefore$ 锐二面角 $A-A_1C-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (本小题满分 12 分)

【解析】(1) 易知 $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$, $\therefore F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$. 设 $P(x, y) (x > 0, y > 0)$, 则

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-\sqrt{3} - x, -y)(\sqrt{3} - x, -y) = x^2 + y^2 - 3 = -\frac{5}{4}, \text{ 又 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{7}{4} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, P(1, \frac{\sqrt{3}}{2}). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 显然 $x = 0$ 不满足题设条件, 可设 l 的方程为 $y = kx + 2$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4(kx + 2)^2 = 4 \Rightarrow (1 + 4k^2)x^2 + 16kx + 12 = 0$$

$$\therefore x_1 x_2 = \frac{12}{1 + 4k^2}, x_1 + x_2 = -\frac{16k}{1 + 4k^2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

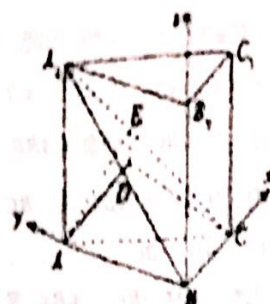
$$\text{由 } \Delta = (16k)^2 - 4 \cdot (1 + 4k^2) \cdot 12 > 0$$

$$16k^2 - 3(1 + 4k^2) > 0, 4k^2 - 3 > 0, \text{ 得 } k^2 > \frac{3}{4}. \text{ ①}$$

$$\text{又 } \angle AOB \text{ 为锐角} \Leftrightarrow \cos \angle AOB > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } y_1 y_2 = (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = k^2 x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4$$



$$\begin{aligned} \therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 &= (1+k^2)x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 = (1+k^2) \cdot \frac{12}{1+4k^2} + 2k \cdot \left(-\frac{16k}{1+4k^2}\right) + 4 \\ &= \frac{12(1+k^2)}{1+4k^2} - \frac{2k \cdot 16k}{1+4k^2} + 4 = \frac{4(4-k^2)}{1+4k^2} > 0 \therefore -\frac{1}{4} < k^2 < 4. \text{ ②} \end{aligned}$$

综①②可知 $\frac{3}{4} < k^2 < 4$, $\therefore k$ 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

21. (本小题满分 12 分)

【解析】(1) 由于 $f(x) = 2\ln x - 2mx + x^2$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{2(x^2 - mx + 1)}{x}$.

对于方程 $x^2 - mx + 1 = 0$, 其判别式 $\Delta = m^2 - 4$.

当 $m^2 - 4 \leq 0$, 即 $0 < m \leq 2$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

当 $m^2 - 4 > 0$, 即 $m > 2$, 方程 $x^2 - mx + 1 = 0$ 恰有两个不相等的实根 $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$, 令 $f'(x) > 0$, 得

$0 < x < \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ 或 $x > \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$, 此时 $f(x)$ 单调递增; 令 $f'(x) < 0$, 得 $\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} < x < \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$.

此时 $f(x)$ 单调递减.

综上所述, 当 $0 < m \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

当 $m > 2$ 时, $f(x)$ 的减区间为: $(\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2})$,

增区间为: $(0, \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2})$, $(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}, +\infty)$.

(2) 由 (1) 知, $f'(x) = \frac{2(x^2 - mx + 1)}{x}$,

所以 $f'(x)$ 的两根 x_1, x_2 即为方程 $x^2 - mx + 1 = 0$ 的两根. 因为 $m \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\Delta = m^2 - 4 > 0$.

$x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = 1$.

又因为 x_1, x_2 为 $h(x) = \ln x - cx^2 - bx$ 的零点,

所以 $\ln x_1 - cx_1^2 - bx_1 = 0, \ln x_2 - cx_2^2 - bx_2 = 0$,

两式相减得 $\ln \frac{x_1}{x_2} - c(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - b(x_1 - x_2) = 0$, 得 $b = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} - c(x_1 + x_2)$.

而 $h'(x) = \frac{1}{x} - 2cx - b$, 所以

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)h'(x_0) &= (x_1 - x_2)\left(\frac{1}{x_0} - 2cx_0 - b\right) = (x_1 - x_2)\left[\frac{2}{x_1 + x_2} - c(x_1 + x_2) - \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} + c(x_1 + x_2)\right] \\ &= \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} - \ln \frac{x_1}{x_2} = 2 \cdot \frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{\frac{x_1}{x_2} + 1} - \ln \frac{x_1}{x_2}. \end{aligned}$$



令 $\frac{x_1}{x_2} = t (0 < t < 1)$, 由 $(x_1 + x_2)^2 = m^2$ 得 $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = m^2$, 因为 $x_1x_2 = 1$,

两边同时除以 x_1x_2 , 得 $t + \frac{1}{t} + 2 = m^2$, 因为 $m \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故 $t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{2}$,

解得 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 或 $t \geq 2$, 所以 $0 < t \leq \frac{1}{2}$. -----10 分

设 $G(t) = 2 \cdot \frac{t-1}{t+1} - \ln t$, 所以 $G'(t) = \frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2} < 0$, 则 $y = G(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是减函数, 所以

$$G(t)_{\min} = G(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3} + \ln 2,$$

即 $y = (x_1 - x_2)h'(x_0)$ 的最小值为 $-\frac{2}{3} + \ln 2$. 所以 $(x_1 - x_2)h'(x_0) \geq -\frac{2}{3} + \ln 2$. -----12 分

请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 若多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)

【解析】(I) 圆 C 的普通方程是 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 又 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$;
所以圆 C 的极坐标方程是 $\rho = 2 \cos \theta$. -----5 分

(II) 设 (ρ_1, θ_1) 为点 P 的极坐标, 则有 $\begin{cases} \rho_1 = 2 \cos \theta_1 \\ \theta_1 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \rho_1 = 1 \\ \theta_1 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

设 (ρ_2, θ_2) 为点 Q 的极坐标, 则有 $\begin{cases} \rho_2(\sin \theta_2 + \sqrt{3} \cos \theta_2) = 3\sqrt{3} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \rho_2 = 3 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

由于 $\theta_1 = \theta_2$, 所以 $|PQ| = |\rho_1 - \rho_2| = 2$, 所以线段 PQ 的长为 2. -----10 分

23. (本小题满分 10 分)

【解析】(I) 原不等式可化为: $|x-1| > 1-x^2$ 即: $x-1 > 1-x^2$ 或 $x-1 < x^2-1$ 2 分

由 $x-1 > 1-x^2$ 得 $x > 1$ 或 $x < -2$ 由 $x-1 < x^2-1$ 得 $x > 1$ 或 $x < 0$

综上原不等式的解为 $x > 1$ 或 $x < 0$ 5 分

(II) 原不等式等价于 $|x-1| + |x+3| < m$ 的解集非空.

令 $h(x) = |x-1| + |x+3|$, 即 $h(x) = |x-1| + |x+3|_{\min} < m$,8 分

由 $|x-1| + |x+3| \geq |x-1-x-3| = 4$, 所以 $h(x)_{\min} = 4$,

所以 $m > 4$10 分

