

太原市 2017—2018 学年第一学期九年级期末考试 数学试卷

一、选择题（本大题含 10 小题，每题 3 分，共 30 分）下列各题给出的四个选项中，只有一个符合要求，请将正确答案的字母代号填入相应的位置。

1.一元二次方程 $x^2+4x=0$ 的一根为 $x=0$ ，另一根为（ ）

- A. $x=2$ B. $x=-2$ C. $x=4$ D. $x=-4$

【答案】D

【考点】因式分解法解一元二次方程

【解析】 $x^2+4x=0$ 因式分解得： $x(x+4)=0$ ， $\therefore$ 易得另一根为 $x=-4$ 。

2.若反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象经过点 $(-2, m)$ ，那么 m 的值为（ ）

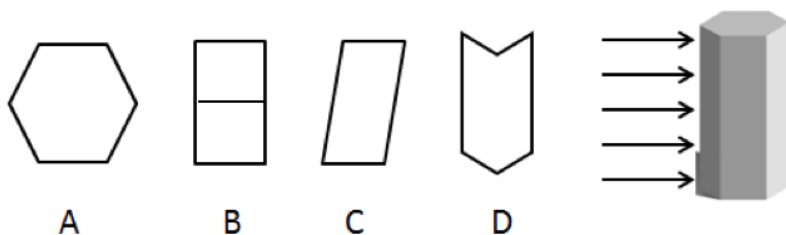
- A.1 B.-1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【考点】反比例函数的图象与性质

【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象经过点 $(-2, m)$ ， $\therefore m = \frac{2}{-2} = -1$

3.把一个正六棱柱如右图水平放置，一束水平方向的平行光线照射此正六棱柱时的正投影是（ ）



【答案】B

【考点】平行投影

【解析】根据平行投影特点以及图中正六棱柱的摆放位置即可求解

4.小明和小颖做“剪刀、石头、布”的游戏，假设他们每次出这三种手势的可能性相同，则在一次游戏中两人手势

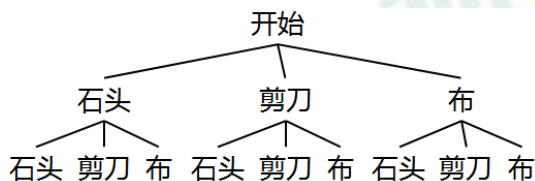
相同的概率是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

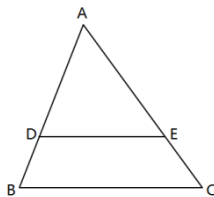
【考点】概率

【解析】画树状图如下图，共有 9 种等可能的情况，两人手势相同的情况是 3 种，所以两人手势相同的概率 $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



5. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在 AB、AC 边上， $DE \parallel BC$. 若 $AD = 2DB$ ，则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$



【答案】B

【考点】相似三角形的面积比

【解析】 $\because DE \parallel BC, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2,$

$\because AD = 2DB, \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9}$

6. 下列四个表格表示的变量关系中，变量 y 是 x 的反比例函数的是 ()

x	-2	-1	1	2
y	6	4	0	-2

A

x	-2	-1	1	2
y	-6	-3	3	6

B

x	-2	-1	1	2
y	3	6	-6	-3

C

x	-2	-1	1	2
y	2	1	-1	-2

D

【答案】C

【考点】反比例函数的定义

【解析】根据 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 是反比例函数，将其转化为 $xy=k$ 的形式，将 A、B、C、D 四个选项的值代入，可知满足条件的答案为 C.

7. 在平面直角坐标系中，将四边形 OABC 四个顶点的横坐标、纵坐标分别乘-2，依次连接得到的四个点，可得到一个四边形，关于所得四边形，下列说法正确的是（ ）

A. 与原四边形关于 x 轴对称

B. 与原四边形关于原点位似，相似比为 1:2

C. 与原四边形关于原点中心对称

D. 与原四边形关于原点位似，相似比为 2:1

【答案】D

【考点】图形的位似

【解析】解:根据图形的位似得，原点为位似中心，向反方向扩大为原来的二倍，故选 D

8. 股市规定：股票每年的涨、跌幅均不超过 10%，即当涨了原价的 10%后，便不能再涨，叫做涨停；当跌了原价的 10%后，便不能再跌，叫做跌停.现有一支股票某天涨停，之后两天时间又跌回到涨停之前的价格，若这两天此股票股价的平均下跌率为 x，则 x 满足的方程是（ ）

A. $(1+10\%)(1-x)^2=1$

B. $(1-10\%)(1+x)^2=1$

C. $(1-10\%)(1+2x)=1$

D. $(1+10\%)(1-2x)=1$

【答案】A

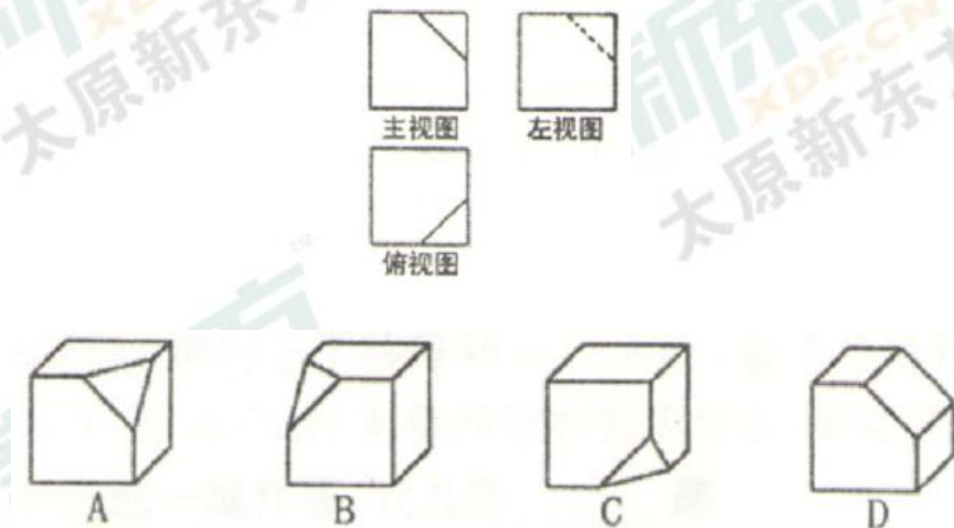
【考点】由实际问题抽象出一元二次方程

【解析】解：根据题意得：一支股票某天涨停，之后两天时间又跌回到涨停之前的价格，即：先涨到原来价格的

110%，再从此基础跌到原来的价格，又因为这两天此股票的平均下跌率为 x ，由此列方程得： $(1+10\%)(1-x)$

$^2=1$ 故选 A

9. 如图是一个几何体的三视图，则该几何体可能是下列的 ()



【答案】A

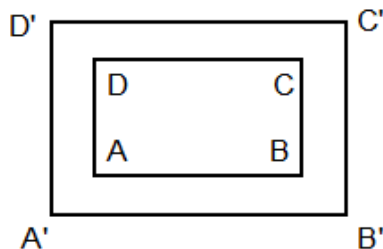
【考点】根据三视图判断几何体

【解析】根据三视图的定义：主视图是从物体的前面向后面投影所得的视图；左视图是从物体的左面向右面投影所得的视图；俯视图是从物体的上面向下面投影所得的视图；根据题中给出的三视图可得正确答案为 A.

10. 书画经装裱后更便于收藏,如图,画心 ABCD 为长 90cm、宽 30cm 的矩形,装裱后整幅画为矩形 A' B' C' D' ,

两矩形的对应边互相平行,且 AB 与 A' B' 的距离、CD 与 C' D' 的距离都等于 4cm,当 AD 与 A' D' 的距离、

BC 与 B' C' 距离都等于 a cm,且矩形 ABCD $\sim$ 矩形 A'B' C' D'时,整幅书画最美观,此时, a 的值为 ().



A. 4

B. 6

C. 12

D. 24

【答案】C

【考点】相似多边形的性质

【解析】解: 根据题意得: $AD=BC=30\text{cm}$, $AB=CD=90\text{cm}$,

$$A'D' = B'C' = 38\text{ cm},$$

$$A'B' = C'D' = (90+2a)\text{cm},$$

$\therefore$ 矩形 $ABCD \sim$ 矩形 $A'B'C'D'$,

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$$

$$\text{即 } \frac{90}{90+2a} = \frac{30}{38}$$

$$\text{得: } a=12\text{cm} \quad \text{故选 C}$$

二、填空题 (本大题含 5 个小题, 每小题 2 分, 共 10 分) 把结果直接填在横线上.

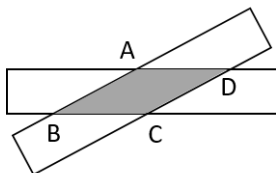
11. 反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象位于坐标系的第 _____ 象限.

【答案】二、四

【考点】反比例函数图象

【解析】反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的 $k=-3$, $-3<0$, 所以图象位于二、四象限

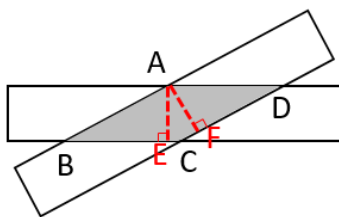
12. 如图, 两张宽均为 3cm 的矩形纸条交叉重叠在一起, 重叠的部分为四边形 $ABCD$, 若测得 $AB=5\text{cm}$, 则四边形 $ABCD$ 的周长为 _____ cm .



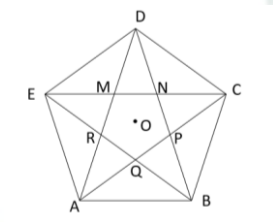
【答案】20

【考点】菱形的判定与性质

【解析】如图, 过 A 点做 $AE \perp BC$ 于点 E , 做 $AF \perp DC$ 于点 F , 由题意得 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\because$ 两张矩形纸条等宽, $\therefore AE=AF$, 又 $\because S_{\text{四边形 } ABCD} = BC \cdot AE = DC \cdot AF$, $\therefore BC=DC$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 周长 $= 4AB = 4 \times 5 = 20\text{cm}$.



13.如图,正五边形 $ABCDE$ 的各条对角线的交点为 M, N, P, Q, R , 它们分别是各条对角线的黄金分割点, 若 $AB=2$, 则 MN 的长为_____.



【答案】 $3-\sqrt{5}$

【考点】 黄金分割

【解析】 $\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形, $\therefore \angle EDC = (5-2) \times 180^\circ \div 5 = 108^\circ$, $\therefore \angle ADB = 108^\circ - (180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$, $\therefore \angle DEC = \angle EDA = 36^\circ$, $\therefore \angle EDN = \angle END = 72^\circ$, $\therefore \triangle DEN$ 是等腰三角形, $\therefore DE = EN$, 又 $\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形, $\therefore DE = AB = 2$,

同理, $CM = CD = 2$, 又 $\because$ 点 N 是线段 EC 黄金分割点, $\therefore EN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} EC$,

$\therefore 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} EC$, $\therefore EC = \sqrt{5} + 1$, $\therefore MN = EN + CM - EC = 2 + 2 - (\sqrt{5} + 1) = 3 - \sqrt{5}$

14.新年期间,某游乐场准备推出幸运玩家抽奖活动,其规则是:在一个不透明的袋子里装有若干个红球和白球(每个球除颜色外都完全相同),参加抽奖的人随机摸一个球,若摸到红球,则可获赠游乐场通票一张,游乐场预估有 300 人参加抽奖活动,计划发放游乐场通票 60 张,则袋中红、白两种颜色小球的数量比应为_____.

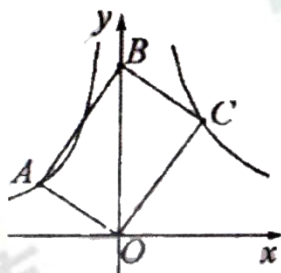
【答案】 1:4

【考点】 概率的计算

【解析】由题意得，摸到红球的概率约为 $\frac{60}{300} = \frac{1}{5}$ ，

∴红、白两种颜色小球数量比为 1:4

15. 点 A, C 分别在反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ ($x < 0$) 与 $y = \frac{9}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，若四边形 OABC 是矩形，且点 B 恰好在 y 轴上，则点 B 的坐标为_____.



【答案】 $(0, \frac{13\sqrt{6}}{6})$

【考点】反比例函数图象性质，相似三角形，三垂直模型

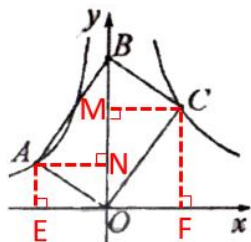
【解析】设 C 点坐标为 $(m, \frac{9}{m})$ ，如图，过 A 点向 x 轴、y 轴分别做垂线交于点 E、N，过 C 点向 x 轴、y 轴分别

做垂线交于点 F、M， $S_{\triangle BCO} = S_{\triangle BAO}$ ，∴ $AN = CM$ ，∴ A 点坐标为 $(-m, \frac{4}{m})$ ，∴ $\angle AEO = \angle CFO = 90^\circ$ ，又 ∵ $\angle AOC = 90^\circ$ ，

∴ $\angle AOE + \angle COF = 90^\circ$ ，∴ $\angle AOE = \angle OCF$ ，∴ $\triangle AOE \sim \triangle OCF$ ，∴ $\frac{AE}{OF} = \frac{OE}{CF}$ ，又 ∵ $AE = \frac{4}{m}$ ， $CF = \frac{9}{m}$ ， $OF = OE = m$ ，

代入，求得 $m = \sqrt{6}$ ，又 ∵ $\angle AOB = \angle CBO$ ， $\angle ANO = \angle CMB$ ， $AO = BC$ ，∴ $\triangle ANO \cong \triangle CMB$ ，∴

$BM = NO$ ，∴ $OB = BM + OM = \frac{9}{m} + \frac{4}{m} = \frac{13}{m} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$ ，∴ B 点坐标为 $(0, \frac{13\sqrt{6}}{6})$



三、解答题（本大题含 8 个小题，共 60 分）解答时应写出必要的文字说明、演算步骤或推理过程.

16. 解下列方程：（每题 4 分，共 8 分）

(1) $x^2 - 8x + 1 = 0$ (2) $x(x-2) + x - 2 = 0$

【答案】(1) $x_1 = 4 + \sqrt{15}$, $x_2 = 4 - \sqrt{15}$ (2) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

【考点】解一元二次方程

【解析】

解： (1) $x^2 - 8x + 1 = 0$

$$\because \Delta = b^2 - 4ac = 60$$

$$\therefore x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{60}}{2}$$

$$\therefore x_1 = 4 + \sqrt{15} \quad x_2 = 4 - \sqrt{15}$$

(2) $x(x-2) + x - 2 = 0$

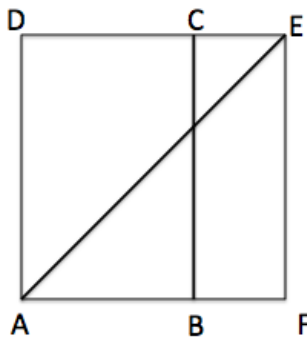
$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$\therefore x-2=0 \quad \text{或} \quad x+1=0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

17. （本题 6 分）

已知矩形 ABCD，AE 平分 $\angle DAB$ 交 DC 的延长线于点 E，过点 E 作 $EF \perp AB$ ，垂足 F 在边 AB 的延长线上，求证：四边形 ADEF 是正方形.



【答案】见解析

【考点】正方形的证明

【解析】证明：∵ 四边形 ABCD 为矩形， ∴ $\angle D = \angle DAB = 90^\circ$ DC // AB

又 ∵ EF ⊥ AF ∴ $\angle F = 90^\circ$ ∴ 四边形 AFED 为矩形

又 ∵ DC // AB ∴ $\angle DEA = \angle EAF$

又 ∵ EA 平分 $\angle DAB$ ∴ $\angle DAE = \angle EAB = \angle DEA$ ∴ $\triangle DEA$ 为等腰三角形 DE = DA

∴ 四边形 AFED 为正方形

18. (本题 4 分)

花园的护栏由木杆组成，小明以其中三根等高的木杆为观测对象，研究它们影子的规律。图 1，图 2 中的点 A，B，C 均为这三根木杆的俯视图（点 A，B，C 在同一直线上）。

(1) 图 1 中线段 AD 是点 A 处的木杆在阳光下的影子，请在图 1 中画出表示另外两根木杆同一时刻阳光下的影子的线段；

(2) 图 2 中线段 AD，BE 分别是点 A，B 处的木杆在路灯照射下的影子，其中 DE // AB，点 O 是路灯的俯视图，请在图 2 中画出表示点 C 处木杆在同一灯光下影子的线段；

(3) 在 (2) 中，若 O，A 的距离为 2m，AD = 2.4m，OB = 1.5m，则点 B 处木杆的影子线段 BE 的长为 _____ m.

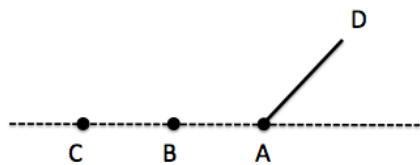


图1

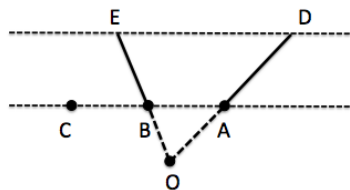


图2

【答案】(1) 见解析； (2) 见解析； (3) 1.8

【考点】投影与视图，平行线分线段成比例

【解析】

(1) 如图即为所求

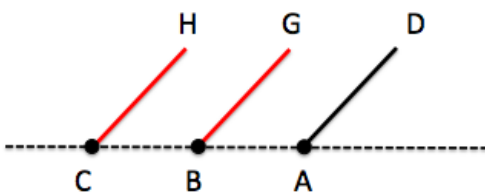


图1

(2) 如图即为所求

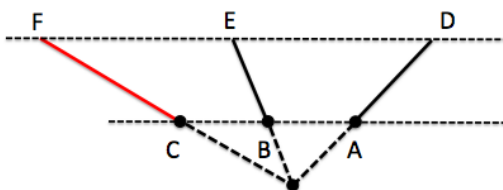


图2

(3) 由图可知 $\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BE}$ $\therefore \frac{2}{2.4} = \frac{1.5}{BE}$ $\therefore BE = 1.8$

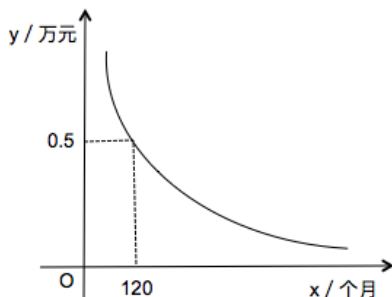
19. (本题 6 分)

王叔叔计划购买一套商品房，首付 30 万元后，剩余部分用贷款并按“等额本金”的形式偿还，即贷款金额按月分期还款，每月所还贷款本金数相同，设王叔叔每月偿还贷款本金 y 万元， x 个月还清，且 y 是 x 的反比例函数，其图象如图所示。

(1) 求 y 与 x 的函数关系式；

(2) 王叔叔购买的商品房的总价是_____万元；

(3) 若王叔叔计划每月偿还贷款本金不超过 2000 元，则至少需要多少个月还清？



【答案】(1) $y = \frac{60}{x} (x > 0)$ (2) 90 (3) 300

【考点】反比例函数的实际应用

【解析】(1) 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$

把点 (120, 0.5) 代入解析式得： $0.5 = \frac{k}{120}$ ，则 $k=60$

所以 y 与 x 的函数关系式 $y = \frac{60}{x} (x > 0)$

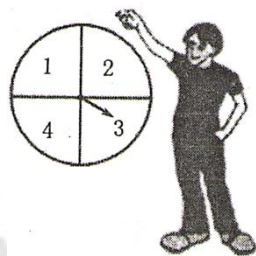
(2) $30+60=90$ 万元

(3) $\because 2000 \text{ 元} = 0.2 \text{ 万元}$ $\therefore$ 当 $y=0.2$ 时， $0.2 = \frac{60}{x}$ $\therefore x=300$

$\therefore$ 王叔叔计划每月偿还贷款本金不超过 2000 元，则至少需要 300 个月还清。

20. (本题 6 分)

新年联欢会，班里组织同学们进行才艺展示，如图所示的转盘被等分成四个扇形，每个扇形区域代表一项才艺：1-唱歌；2-舞蹈；3-朗诵；4-演奏.每名同学要随机转动转盘两次，转盘停止后，根据指针指向的区域确定要展示的两项内容（若两次转到同一区域或分割线上，则重新转动，直至得出不同结果）求小明恰好展示“唱歌”和“演奏”两项才艺的概率。



【答案】 $\frac{1}{6}$

【考点】概率的计算

【解析】列表：

第一次 第二次	1	2	3	4
1		(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
2	(1, 2)		(3, 2)	(4, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)		(4, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	

由表格可得一共有 12 种等可能的结果, 恰好是“唱歌”和“演奏”的结果有 2 个, 所以概率 $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

21. (本题 6 分)

为了弘扬山西地方文化, 我省举办了“第三届山西文化博览会”. 博览会上一种文化商品的进价为 30 元/件, 售价为 40 元/件, 平均每天能售出 600 件. 调查发现, 售价在 40 元至 60 元范围内, 这种商品的售价每上涨 1 元, 其每天的销售量就减少 10 件. 为使这种商品平均每天的销售利润为 10000 元, 这种商品的售价应定为多少元?

【答案】50

【考点】一元二次方程的应用

【解析】解: 设这种商品的售价应定为 x 元.

由题意可得: $[600 - 10(x - 40)](x - 30) = 10000$

整理得: $x^2 - 130x + 4000 = 0$, 解得: $x_1 = 50$, $x_2 = 80$ (舍去).

答: 这种商品的售价应定为 50 元.

22. (本题 12 分) 综合与实践:

问题情境:

如图 1, 矩形 $ABCD$ 中, BD 为对角线, $\frac{AD}{AB} = k$, 且 $k > 1$. 将 $\triangle ABD$ 以 B 为旋转中心, 按顺时针方向旋转, 得到 $\triangle FBE$ (点 D 的对应点为点 E , 点 A 的对应点为点 F), 直线 EF 交直线 AD 于点 G .

数学思考:

(1) 在图 1 中连接 AF , DE , 可以发现在旋转过程中存在一个三角形始终与 $\triangle ABF$ 相似, 这个三角形是_____, 它与 $\triangle ABF$ 的相似比为_____ (用含 k 的式子表示);

(2) 如图2, 当点E落在DC边的延长线上时, 点F恰好落在矩形ABCD的对角线BD上, 此时k的值为_____;

实践探究:

(3) 如图3, 当点E恰好落在BC边的延长线上时, 求证: $CE=FG$;

(4) 当 $k=\frac{4}{3}$ 时, 在 $\triangle ABD$ 绕点B旋转的过程中, 利用图4探究下面的问题.

请从A, B两题中任选一题作答, 我选择_____题.

A: 当AB的对应边FB与AB垂直时, 直接写出 $\frac{DG}{AB}$ 值.

B: 当AB的对应边FB在直线BD上时, 直接写出 $\frac{DG}{AB}$ 的值.

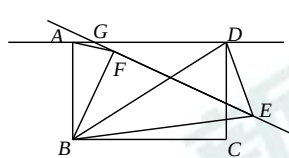


图1

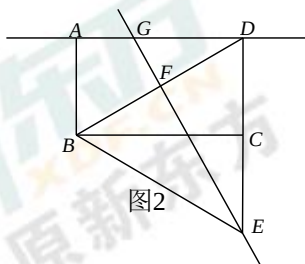


图2

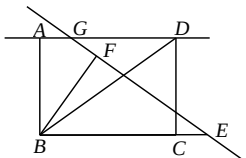


图3

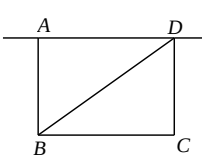


图4

【答案】(1) $\triangle DBE$; $\sqrt{k^2+1}:1$; (2) $\sqrt{3}$; (3) 证明过程见解析;

(4) A: $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{7}{3}$, B: $\frac{5}{6}$ 或 $\frac{10}{3}$.

【考点】矩形的性质、旋转问题

【解析】(1) 解: 由旋转可得 $AB=FB, BD=BE, \angle ABD=\angle FBE$,

$\therefore \angle ABD - \angle FBD = \angle FBE - \angle FBD$, 即 $\angle ABF = \angle DBE$,

又 $\because \frac{AB}{BD} = \frac{BF}{BE}$, $\therefore \triangle ABF \sim \triangle DBE$,

在 $Rt\triangle ABD$ 中 $\because \frac{AD}{AB} = k$, $\therefore BD = \sqrt{k^2+1}AB$, $\therefore$ 相似比为 $\frac{BD}{AB} = \sqrt{k^2+1}:1$;

(2) 解: $\because \triangle ABD$ 以B为旋转中心, 按顺时针方向旋转, 得到 $\triangle FBE$

$\therefore \angle ABD = \angle FBE, BD=BE$,

$\because$ 四边形ABCD是矩形, 且点E在DC边的延长线上, $\therefore BC \perp DE, \angle ABC=90^\circ$

$\therefore \angle DBC = \angle EBC = \frac{1}{2} \angle FBE$ (三线合一), $\therefore \angle ABD = 2\angle DBC$,

$$\because \angle ABD + \angle DBC = \angle ABC = 90^\circ, \quad \therefore \angle ABD = 60^\circ, \quad \therefore \frac{AD}{AB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \text{即 } k = \sqrt{3}.$$

(3) 如图 3, 连接 BG,

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形, $\therefore \angle BAD = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AD = BC$,

$\because \triangle ABD$ 以 B 为旋转中心, 按顺时针方向旋转, 得到 $\triangle FBE$,

$\therefore \angle BFC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = BF$, $BD = BE$,

$$\text{在 } \triangle ABG \text{ 和 } \triangle FBG \text{ 中} \quad \because \begin{cases} AB = FB \\ BG = BG \end{cases} \quad \therefore \text{Rt} \triangle ABG \cong \text{Rt} \triangle FBG \text{ (HL)} \quad \therefore \angle AGB = \angle FGB$$

$\because AD \parallel BC \quad \therefore \angle AGB = \angle GBC = \angle FGB \quad \therefore BE = EG$

$\because EF = AD = BC \quad \therefore BE - BC = EG - EF \quad \text{即 } CE = FG;$

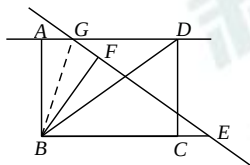


图3

(4) A: 解: 如图 5, 当点 F 在线段 BC 上时,

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形 $\therefore \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, $AD \parallel BC$

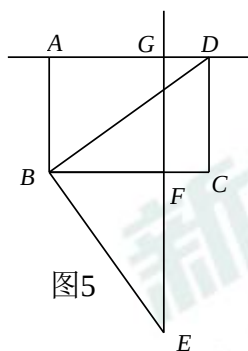
$\because \triangle ABD$ 以 B 为旋转中心, 按顺时针方向旋转, 得到 $\triangle FBE$

$\therefore \angle BAD = \angle BFE = 90^\circ$, $AB = BF$,

$\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle AGF = \angle BFE = 90^\circ$, $\therefore$ 四边形 ABFG 是矩形,

$\because AB = BF$, $\therefore$ 矩形 ABFG 是正方形, $\therefore AB = BF = AG$,

$$\because k = \frac{4}{3}, \quad \therefore AD = \frac{4}{3} AB \quad \therefore DG = AD - AG = \frac{1}{3} AB \quad \therefore \frac{DG}{AB} = \frac{1}{3};$$



如图 6，当点 F 在线段 CB 的延长线上时，同理可证得四边形 ABFG 是正方形，

$$\therefore DG = AD + AG = \frac{7}{3} AB \quad \therefore \frac{DG}{AB} = \frac{7}{3};$$

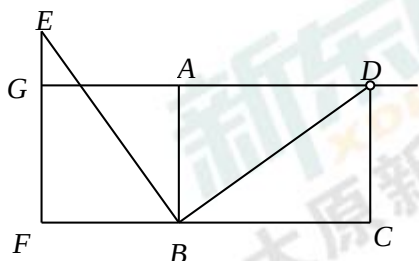


图6

B: 解: 如图 7，当点 F 在线段 BD 上时，连接 BG，

可易证得 $\triangle ABG \cong \triangle FBG$ (已证) $\therefore AG = GF$, $AB = BF$,

$\therefore k = \frac{4}{3}$, 令 $AB = 3$, 则 $AD = 4$, 由勾股定理可得 $BD = 5$,

设 $AG = GF = x$, 则 $DG = 4 - x$, $DF = 5 - 3 = 2$,

在 $Rt\triangle DFG$ 中, $GD^2 = GF^2 + DF^2$ 即 $(4 - x)^2 = x^2 + 2^2$ 解得: $x = \frac{3}{2}$

$$\therefore DG = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad \therefore \frac{DG}{AB} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}.$$

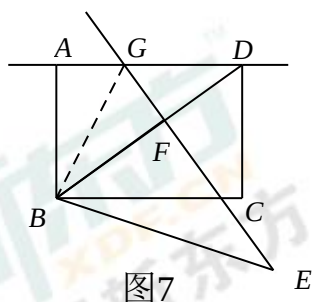


图7

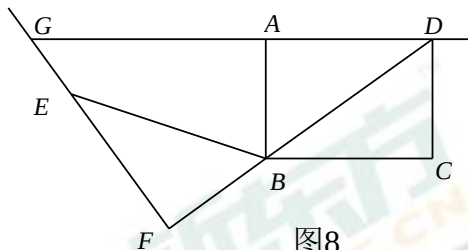


图8

如图 8, 当点 F 在线段 DB 的延长线上时,

由 $k = \frac{4}{3}$, 令 $AB=3$, 则 $AD=4$, 由勾股定理可得 $BD=5$,

$\therefore \triangle ABD$ 以 B 为旋转中心, 按顺时针方向旋转, 得到 $\triangle FBE$

$\therefore AB=BF=3$, $AD=EF=4$, $BE=BD=5$, $\angle BEF = \angle BDA$

$\therefore \angle F = \angle D = 90^\circ$, $\therefore \triangle BEF \sim \triangle GDF$ $\therefore \frac{BE}{GD} = \frac{EF}{DF}$ 即 $\frac{5}{GD} = \frac{4}{5+3}$ 解得 $GD=10$

$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{10}{3}$.

23. (本题 12 分)

如图 1, 平面直角坐标系中, $\triangle OAB$ 的顶点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 4)$ 、 $(-5, 0)$. 将 $\triangle OAB$ 沿 OA 翻折, 点 B 的对应点 C 恰好落在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上.

(1) 判断四边形 OBAC 的形状, 并证明;

(2) 直接写出反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的表达式;

(3) 如图 2 将 $\triangle OAB$ 沿 y 轴向下平移得到 $\triangle O'A'B'$, 设平移的距离为 m ($0 < m < 4$), 平移过程中 $\triangle O'A'B'$ 与 $\triangle OAB$ 重叠部分的面积为 S. 探究下列问题.

请从 A, B 两题中任选一题作答, 我选择_____题.

A: 若点 B 的对应点 B' 恰好落在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上, 求 m 的值, 并直接写出此时 S 的值;

B: 若 $S = \frac{1}{2} S_{\triangle OAB}$, 求 m 的值;

(4) 如图 3, 连接 BC, 交 AO 于点 D. 点 P 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上的一点.

请从 A,B 两题中任选一题作答, 我选择_____题.

A : 在 x 轴上是否存在点 Q, 使得点 O, D, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 直接写出所有满足条件的平行四边形的顶点 P, Q 的坐标; 若不存在, 说明理由;

B : 在坐标平面内是否存在点 Q, 使得以点 A, O, P, Q 为顶点的四边形是矩形? 若存在, 直接写出所有满足条件的点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由;

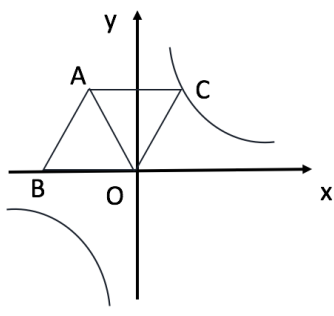


图 1

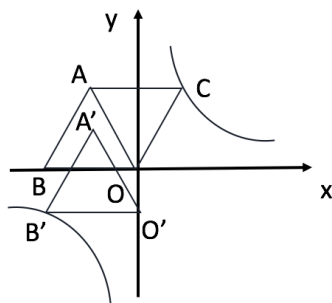


图 2

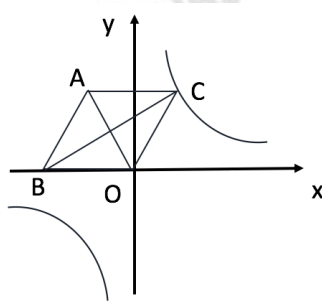


图 3

【答案】(1) 菱形, 证明见解析 (2) $y = \frac{12}{x}$ (3) A. $m = \frac{12}{5}, S = \frac{8}{5}$ B. $m = 4 - 2\sqrt{2}$

(4) A. $P_1(6, 2) Q_1(-7, 0); P_2(6, 2) Q_2(7, 0); P_3(-6, -2) Q_3(-7, 0)$

B. $Q_1(-2 + 2\sqrt{6}, 4 + \sqrt{6}); Q_2(-2 - 2\sqrt{6}, 4 - \sqrt{6});$

$Q_3(-10, -5); Q_4(4, 2);$

【考点】反比例函数与特殊平行四边形综合

【解析】(1) 过点 A 作 x 轴的垂线交于点 E: $A(-2, 4) B(-5, 0) \therefore OE=2, OB=5, BE=3, AE=4$, 在 $Rt\triangle AEB$ 中, 由勾股定理可得 $AB=5$, 由题可 $\triangle ABO \cong \triangle ACO$,

$\therefore AB=AC=5, OB=OC=5 \therefore$ 四边形 OBAC 四条边相等 $\therefore$ 四边形 OBAC 是菱形.

(2) $\because$ 四边形 OBAC 是菱形 $\therefore$ 对角线互相平分, 由中点公式可得 $C(3, 4)$

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$

(3) A. 由平移可知 B' 横坐标与 B 横坐标相同为 -5, 代入反比例函数解析式可求 B' 坐标为 $(-5, -\frac{12}{5})$, 即向

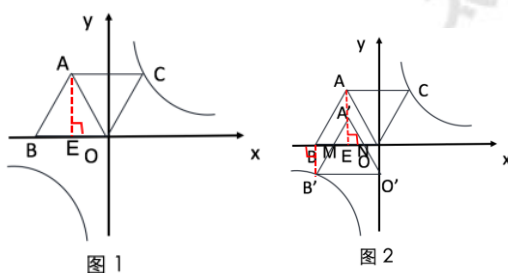
下平移 $\frac{12}{5}$ 个单位长度, $m = \frac{12}{5}$, $AA' = \frac{12}{5}$, 则 $A'E = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$

易得 $\triangle A'MN \sim \triangle ABO$ 由相似的性质可知;对应边之比等于对应边上的高之比即 $\frac{MN}{BO} = \frac{A'E}{AE}$, 即 $\frac{MN}{5} = \frac{\frac{8}{5}}{4}$,

$$MN = 2, S = \frac{MN \cdot A'E}{2} = \frac{8}{5} \quad \text{故 } m = \frac{12}{5}, S = \frac{8}{5}$$

B. 由题可知 $\frac{S}{S_{\triangle OAB}} = \frac{1}{2} \because \triangle A'MN \sim \triangle ABO$ 面积比等于相似比的平方 $\therefore \frac{A'E}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad A'E = 2\sqrt{2}, \quad AA'$

$$= AE - A'E = 4 - 2\sqrt{2} \quad \text{故 } m = 4 - 2\sqrt{2}$$



(4) A. 由题可知 D 为 OA 中点, 所以 D (-1, 2)

$\because$ 点 P 在反比例函数图象上 $\therefore$ 设 P $(m, \frac{12}{m})$ $\because$ 点 Q 在 x 轴上 $\therefore$ 设 Q (n, 0)

$$\text{当 OD 为对角线时, 如图 4 由中点公式可得} \begin{cases} m+n = -1+0 \\ \frac{12}{m} + 0 = 2+0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} n = -7 \\ m = 6 \end{cases}$$

$$\therefore P_1 (6, 2) \quad Q_1 (-7, 0)$$

当 OD 为边时, 如图 5 $\because OQ \parallel DP \therefore$ P 纵坐标为与 D 纵坐标相同, 故 $P_2 (6, 2)$,

$$\because DP = OQ \quad \therefore Q_2 (7, 0)$$

$$\text{如图 6, OD} \parallel \text{PQ 由中点公式可得} \begin{cases} 0+0 = \frac{12}{m} + 2 \\ n+0 = m-1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} n = -7 \\ m = -6 \end{cases}$$

$$\therefore P_3 (-6, -2) \quad Q_3 (-7, 0)$$

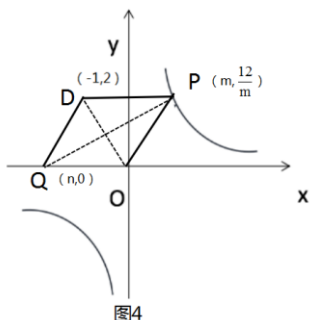


图4

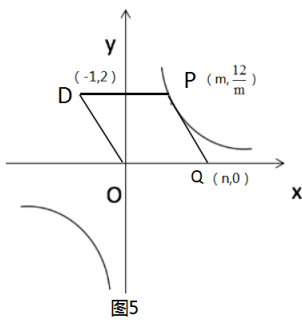


图5

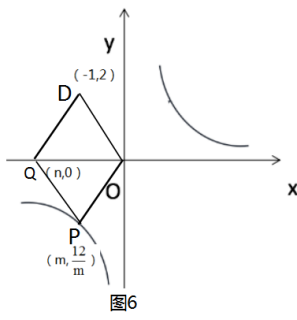


图6

B. ∵ 点 P 在反比例函数图象上 ∴ 设 $P(m, \frac{12}{m})$

当 OA 为边时, 若 $OA \perp OP$, 则 $k_{OA} \cdot k_{OP} = -1$, 如图 7, 直线 OA 解析式为 $y = -2x$, 则直线 OP 解析式为 $y = \frac{1}{2}x$, 将反

比例函数解析式与直线 OP 解析式联立得 $P_1(2\sqrt{6}, \sqrt{6})$; $P_2(-2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$ 其对应点 Q 坐标根据中点公式可得 $Q_1(-2+2\sqrt{6}, 4+\sqrt{6})$; $Q_2(-2-2\sqrt{6}, 4-\sqrt{6})$

若 $OA \perp AP$ 则 $k_{OA} \cdot k_{AP} = -1$, 如图 8 直线 OA 解析式为 $y = -2x$, 则直线 AP 解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 5$, 将反比例函数解析

式与直线 AP 解析式联立得 $P_3(-12, -1)$, $P_4(2, 6)$ 其对应点 Q 坐标根据中点公式可得 $Q_3(-10, -5)$ $Q_4(4, 2)$;

当 OA 为对角线时, 如图 9, $\angle P = 90^\circ$, 根据圆周角定理的推论, 如果圆周角是 90° , 其所对的弦是直径, 即点

P 在以 OA 为直径的圆上, 显然与反比例函数图象无交点, 故此时 P、Q 不存在.

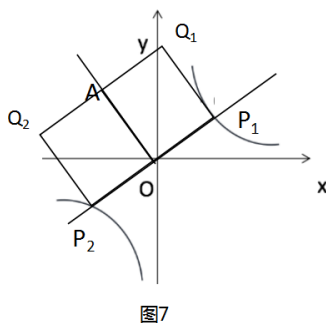


图7

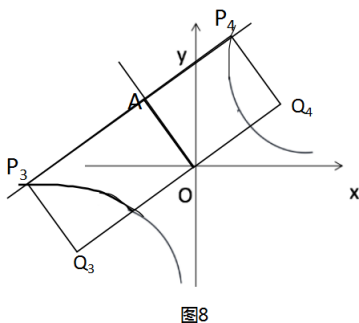


图8

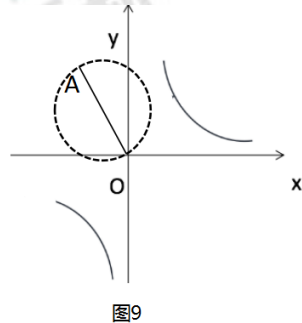


图9