太原市 2017-2018 学年第一学期高三年级期末考试

数学试卷（文科）

一、选择题

1.已知集 $A=\{x|-2\le x\le 5\}, N$ 为自然数集，则集合 $A\cap N$ 中元素的个数为

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

考点：集合的运算，常用数集
答案：B
解析： 自然数为 $0,1,2,3\cdots$，所以 $A\cap N$ 中元素的个数为 6 个

2.设 i 为虚数单位，则复数 $(2i-1)^2$ 在复平面内对应的点在

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

考点：复数
答案：C
解析： $(2i-1)^2=-3-4i$，对应点为 $(-3,-4)$，所以在第三象限

3.设 $x>0, y\in R$,则“$x>y$”是“$x>\|y\|$”的

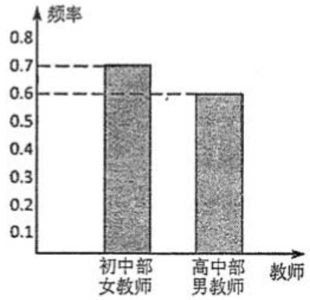
A 必要不充分条件　　B.充分不必要条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

考点：充分，必要条件
答案：A
解析： 由“$x>\|y\|$”可以得到“$x>y$”，所以选 A

4.某中学初中部共有 110 名教师，高中部共有 150 名教师，根据频率分布条形图可知，该校女教师的人数为

A.93　　B.123　　C.137　　D.167



考点：概率与统计
答案：C
解析：初中部女教师的人数为：$110\times0.7=77$，高中部女教师的人数为：$150\times0.4=60$， 该校女教师的人数为：137

5. 下列函数中，在区间$(-1,1)$上是增函数的为

A. $y=\dfrac{1}{1+x}$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=ln(1-x)$　　D. $y=2^{-x}$

考点：函数单调性
答案：B
解析：选项 A. 在$(-1,1)$单调递减，选项 B. 正确，由复合函数同增异减规律 C. D. 错误

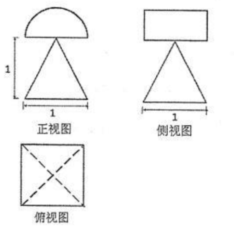
6. 将长度为$8cm$的细绳截成长度为整数（单位：cm）的三段，则这三段能围成三角形的概率为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

考点：古典概型
答案：D
解析：将长度为$8cm$的细绳截成长度为整的三段，所有可能的情况为$(1,1,6)(1,2,5)(1,3,4)(2,3,3)(2,4,2)$，其中能围成三角形的为$(2,3,3)$，根据古典概型概率公式得$P=\dfrac{1}{5}$

7. 已知一个几何体是由四棱锥和半个圆柱（圆柱被过轴的平面所截得到）组成，其三视图如图所示，则该几何体的体积为

A. $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}$　　B. $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}$　　C. $1+\frac{\pi}{8}$　　D. $1+\frac{\pi}{4}$



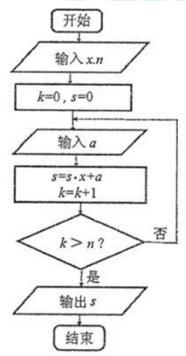
考点：三视图，空间几何体体积

答案：A

解析：四棱锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}$，半个圆柱的体积 $V_2=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1=\frac{\pi}{8}$,故 $V=V_1+V_2=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}$

8. 下图是实现秦九韶算法的一个程序框图，若输入的 $x=2,n=2$，依次输入的 a 为 2,2,5，则输出的 $s=$

A. 7　　B. 12　　C. 17　　D. 34



考点：程序框图

答案：C

解析：第一次循环 $a=2,s=0\times2+2=0,k=1$；第二次循环 $a=2,s=2\times2+2=6,k=2$；第三次循环 $a=5,s=6\times2+5=17,k=3$ 退出循环，$s=17$

9.已知 $x\in(\frac{1}{2},1),a=\ln x,b=2\ln x,c=\ln^3 x$,那么

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

考点：比较大小

答案：C

解析：由 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 可知 $-1<\ln x<0$ ，即 $-1<a<0$ ，所以可得 $b<a<c$

10.已知 $\cos(\frac{\pi}{2}-2x)-2\sin^2 x=A\sin(\omega x+\varphi)+b$,则

A. $A=\sqrt{2},b=1$　B. $A=\sqrt{2},b=-1$　C. $A=2,b=1$　D. $A=2,b=-1$

考点：三角函数，恒等变换
答案：B
解析：等号左边化简可得 $\sin 2x-2\sin^2 x=1-2\sin^2 x+\sin 2x-1=\cos 2x+\sin 2x-1=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})-1$ 故 $A=\sqrt{2},b=-1$

11.已知正三棱锥 $P-ABC$ 内接于球 O,且 OÎ 平面 ABC，记正三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 V_1,球 O 的体积为 V_2，则

$A.V_2=2V_1$　$B.3V_2=2pV_1$　$C.9\sqrt{3}V_2=16pV_1$　$D.3\sqrt{3}V_2=16pV_1$

考点：球体
答案：D
解析：假设正三棱锥的底面边长为 a，由题可知 $OA=OB=OC=OP=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，计算可得 $V_1=\frac{a^3}{12},V_2=\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$, 化简可得答案。

12.已知函数 $f(x)=\sin(x-3)+x-1$,数列 $\{a_n\}$ 的公差不为 0 的等差数列，若 $f(a_1)+f(a_2)+...f(a_7)=14$,则 $a_1+a_2+...a_7=$

A. 0　B. 7　C.14　D.21

考点：等差数列性质，函数对称性
答案：D
解析：$f(x)-2=\sin(x-3)+(x-3)$，令 $g(x)=f(x)-2=\sin(x-3)+(x-3)$，由此可得 $g(a_1)+g(a_2)+...g(a_7)=0$，函数 $g(x)$ 关于 $(3,0)$ 对称，故 $(a_4,0)$ 为其对称中心，故 $a_4=3$ $a_1+a_2+...a_7=7a_4=21$

二，填空题

13.若命题 $p:\forall x\in R,x^2+2x+2>0$，则命题 p 的否定 $\neg p$: ______________.

答案：$\exists x_0\in R,{x_0}^2+2x_0+2\le 0$
考点：全称、特称命题的否定：改量词，否结论
解析：$\exists x_0\in R,{x_0}^2+2x_0+2\le 0$

14.已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$， $a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_5=$ ____________.

答案：12
考点：等比数列求值问题
解析：由等比数列性质可得 $a_1\cdot a_5={a_3}^2$ 解得， $a_5=\frac{1}{3}{a_3}^2$ 代入 $a_1+a_3+a_5=21$ 可解得 $a_3=6$ ， $q^2=2$ ，所以 $a_5=12$

15.已知向量 a,b 夹角为 90° ，向量 b,c 夹角为 45° ，且 $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert=1,\lvert c\rvert=2\sqrt{2}$ ，则 $\lvert a+b+c\rvert=$ ____

答案：$\sqrt{10}$
考点：向量的运算
解析： 设 $a=(0,1),b=(1,0),c=(2,-2)$ $a+b+c=(3,-1)$ $\lvert a+b+c\rvert=\sqrt{10}$

16.函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+(m^2-1)x(m>0)$ 有三个互不相等的零点 $0,x_1,x_2$ ，且 $x_1<x_2$ ，若对任意的 $x\in[x_1,x_2]$ ，都有成立，则实数 m 的取值范围为______

答案：$m\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
考点：函数恒成立问题
解析： 设 $f'(x)=-x^2+2x+m^2-1=(-x+m+1)(x+m-1)$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1-m),(1+m,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1-m,1+m)$ 上单调递增

$f(x)=x(-\frac{1}{3}x^2+x+m^2-1)=0$ 有三个根

$-\frac{1}{3}x^2+x+m^2-1=0$ 有两个根

$\Delta>0$ 得 $m>\frac{1}{2}$ 且 $x_1+x_2=3$

$\because x_1<x_2,\therefore 2x_2>x_1+x_2=3,x_2=\frac{3}{2}>1$

1）、$x_1\le 1$ 时，显然不成立，舍

2）、$x_1>1$ 时，令 $f(x_1)<0$ 得 $m<\frac{\sqrt{3}}{3}$

综上所述：$m\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

三、解答题（解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$.

（1）求角 C；

（2）若 ΔABC 的面积为 $\frac{3}{2}$，求 ΔABC 的周长.

考点：三角形正弦、余弦定理以及面积公式

解析：

(I)由正弦定理可得：$a:b:c=3:4:5$

由余弦定理可得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$=0，故 C=$\frac{\pi}{2}$

(II)由题意可得 ΔABC 为直角三角形，设 $a=3k$ ，则 $b=4k$ ，故 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab=6k^2=\frac{3}{2}$

所以 $k=\frac{1}{2}$ ，则周长为 $a+b+c=12k=6$.

18.已知数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n ，且 $S_n=a_1(2^n-1), a_4=16, n\in N^*$

（1）求 a_1 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2 a_{n+1}$, 求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 T_n

考点：递推公式，错位求和

解析：

(1)由 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2), a_n=a_1\cdot 2^{n-1}$

$a_4=16, \therefore 16=a_1\cdot 8, \therefore a_1=2 \therefore a_n=2^n$ 经验证 $n=1$ 也满足，所以 $a_n=2^n$

(2)解得 $b_n=n+1$ $a_nb_n=(n+1)2^n$

$T_n=2\times 2+3\times 2^2+4\times 2^3+....+(n+1)\times 2^n$

$2T_n=2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+....+(n+1)\times 2^{n+1}$

由错位相减解得 $T_n=n2^{n+1}$

19.（本小题满分 12 分）

某人参加一项转盘抽奖游戏，参加游戏的人需转动如图所示的转盘两次，每次转动后，待转盘停止转动时，记录指针所指区域中的颜色（其中红色、黄色为暖色；蓝色、绿色为冷色）。设两次记录的颜色分别为 a，b。奖励规则如下：

①若两次记录的颜色中有红色，获得一等奖；

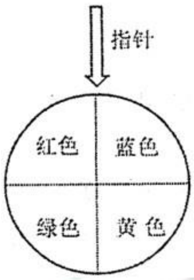
②若两次记录的颜色中没有红色，但不全是冷色，获得二等奖；

③其余情形获得鼓励奖。

假设转盘质地均匀，四个区域划分均匀。

（1）求此人获得一等奖的概率；

（2）比较此人获得二等奖与获得鼓励奖的概率的大小，并说明理由。



考点：古典概型

解析：

(1)用列表法表示出两次记录的结果，其中横向为第一次记录的结果，纵向为第二次记录的结果。

b　a	红色	蓝色	黄色	绿色
红色	（红，红）	（蓝，红）	（黄，红）	（绿，红）
蓝色	（红，蓝）	（蓝，蓝）	（黄，蓝）	（绿，蓝）
黄色	（红，黄）	（蓝，黄）	（黄，黄）	（绿，黄）
绿色	（红，绿）	（蓝，绿）	（黄，绿）	（绿，绿）

共16种基本事件。

其中，两次记录的颜色中有红色包括7种，

记获得一等奖为事件 A ，则 $P(A)=\frac{7}{16}$.

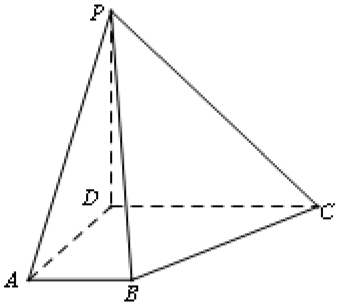
（2）记获得二等奖和获得鼓励奖分别为事件 B,C

因为两次记录中没有红色，但是不全为冷色包括5种基本事件，则 $P(B)=\frac{5}{16}$.

那么， $P(C)=\frac{4}{16}$.

即获得二等奖的概率大。

20.（本小题满分 12 分）



如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=\sqrt{2}DA=\sqrt{2}DB$.

(1)证明：$AD\perp PB$；

(2)若 $PD=AD=\sqrt{2},BC=CD,$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$，求 $\angle BCD$ 的余弦值.

考点：立体几何中线面位置关系证明，棱锥体积

解析：

（1）$\because AB=\sqrt{2}DA=\sqrt{2}DB$

$\therefore AD^2+BD^2=AB^2$

$\therefore AD\perp BD$

又 $\because AD\perp PB,BD\cap PB=B,BD\subset$ 面 $PBD,PB\subset$ 面 PBD

$\therefore AD\perp$ 面 PBD

$\because PB\subset$ 面 PBD

$\therefore AD\perp PB$

（2）设 $BC=CD=x$

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\bullet PD$

$S_{ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\frac{1}{2}x^2\bullet\sin\angle BCD=1+\frac{1}{2}x^2\bullet\sin\angle BCD$

$\therefore V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{2}x^2\bullet\sin\angle BCD\right)\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

$\therefore x^2\bullet\sin\angle BCD=\sqrt{2}$

在 ΔBCD 中应用余弦定理，得

$BD^2=CD^2+BC^2-2CD\bullet BC\bullet\cos\angle BCD$

$\Rightarrow 2=2x^2-2x^2\bullet\cos\angle BCD$

即 $x^2-x^2\bullet\cos\angle BCD=1$

得 $x^2=\frac{3}{2},\cos\angle BCD=\frac{1}{3}$

$\therefore\angle BCD$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$

21.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=x^2e^{x-1}+ax^3+bx^2$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-\frac{1}{3}$.

(1) 求 a、b 的值.

(2) 设 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2$，比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

考点：导数的几何意义；导数的综合运用

解析：

（1）依题意，$f'(x)=e^{x-1}(x^2+2x)+3ax^2+2bx$，由 $\begin{cases} f'(1)=3+3a+2b=0 \\ f(1)=1+a+b=-\frac{1}{3} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-1 \end{cases}$

（2）$f(x)-g(x)=x^2(e^{x-1}-x)$，令 $h(x)=e^{x-1}-x$，则 $h'(x)=e^{x-1}-1$，令 $h'(x)>0,\ x>1$，即 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，即 $h(x)\ge h(1)=0$，又 $x^2\ge 0$，即 $f(x)\ge g(x)$。

22.（本小题满分 10 分）

在极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta+2\sin\theta$，以极点为原点，极轴为 x 轴非负半轴建立平面直角坐标系，且在两坐标系中取相同的长度单位，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}t \\ y=3+\sqrt{6}t \end{cases}$（$t$ 为参数）.

(1)写出曲线 C 的参数方程和直线 l 的普通方程

(2)过曲线 C 上任意一点 M 作与直线 l 相交的直线，该直线与直线 l 所成的锐角为 30°，设交点为 A，求 $|MA|$ 的最大值和最小值，并求出取最大值和最小值时点 M 的坐标

考点：参数方程和极坐标问题

(1)由题可得曲线 C 为：

$\rho^2=2\sqrt{2}\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，转化为一般方程为，$(x-\sqrt{2})^2+(y-1)^2=3$ 所以转化为参数方程为

$\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{2} \\ y=\sqrt{3}\sin\theta+1 \end{cases}$ $(\theta为参)$

直线方程为 $\sqrt{2}x-y+3=0$

（2）解由题意可得曲线 C 的圆心 O 为 $(\sqrt{2},1)$，圆心到直线的距离 $d=\dfrac{\left|\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1+3\right|}{\sqrt{2+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 $|MA|$ 最大值为 $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$，最小值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

由题意可知过圆心 O 且和直线 $\sqrt{2}x-y+3=0$ 垂直直线为 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+2$，带入圆方程可得 $x_1=0,x_2=2\sqrt{2}$。所以得 M 坐标分别是 $(0,2)$和 $(2\sqrt{2},0)$

23.设函数 $f(x)=|x+1|+|x-2|,g(x)=-x^2+5x-4.$

（1）求不等式 $f(x)\le 5$ 的解集 M；

（2）设不等式 $g(x)\ge 0$ 的解集为 N，当 $x\in M\cap N$ 时，证明：$f(x)\le g(x)+3$

考点：绝对值不等式，不等式证明

解析：

（1）$\because f(x)=|x+1|+|x-2|$，$f(x)\le 5\therefore \begin{cases} x<-1 \\ (-1-x)+(2-x)\le 5 \end{cases}$，$\begin{cases} -1\le x<2 \\ (x+1)+(2-x)\le 5 \end{cases}$，

$\begin{cases} x\ge 2 \\ (x+1)+(x-2)\le 5 \end{cases}$ 解得 $M=\{x|-2\le x\le 3\}$

（2）$\because g(x)=-x^2+5x-4$，$g(x)\ge 0\therefore N=\{x|-x^2+5x-4\ge 0\}\therefore N=\{x|1\le x\le 4\}$

$\therefore M\cap N=\{x|1\le x\le 3\}$，当 $1\le x\le 2$ 时 $f(x)=3$，$f(x)\le g(x)+3\Leftrightarrow g(x)\ge 0$,显然成立

当 $2\le x\le 3$ 时 $f(x)=2x-1$，$f(x)\le g(x)+3\Leftrightarrow 2x-1\le -x^2+5x-1\Leftrightarrow x^2-3x\le 0$，

显然成立

综上所述当 $x\in[1,3]$ 时 $f(x)\le g(x)+3$