太原市 2018 年高三模拟试题（一）

数学试卷（理工类）

一、选择题：本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{y\mid y=\log_2 x, x>2\}, B=\left\{y\mid y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, x<1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

$A.(1,+\infty)$　　$B.\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　$C.\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　$D.\left(\frac{1}{2},1\right)$

考点：集合的运算

答案：A

解析：$\because A=\{y\mid y>1\}, B=\left\{y\mid y>\frac{1}{2}\right\}, \therefore A\cap B=\{y\mid y>1\}$

2. 若复数 $z=\frac{1+mi}{1+i}$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是（　　）

$A.(-1,1)$　　$B.(-1,0)$　　$C.(1,+\infty)$　　$D.(-\infty,-1)$

考点：复数运算与几何意义

答案：A

解析：$z=\frac{m+1+(m-1)i}{2}$，由复数在复平面内对应的点在第四象限

所以 $\begin{cases} m+1>0 \\ m-1<0 \end{cases}$　解得 $m\in(-1,1)$

3. 已知命题 $p:\exists x_0\in R, x_0^2-x_0+1\geq 0$；命题 q：若，$a<b$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.则下列为真命题的是（　　）

$A.p\wedge q$　　$B.p\wedge\neg q$　　$C.\neg p\wedge q$　　$D.\neg p\wedge\neg q$

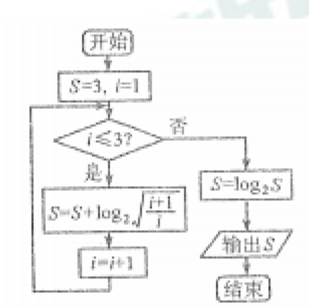
考点：命题真假的判断

答案：B

解析：p 真 q 假，所以 $p\wedge\neg q$ 为真.

4. 执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为（　　）

$A.3+\frac{1}{2}\log_2 3$　　$B.\log_2 3$　　$C.3$　　$D.2$



考点：程序框图

答案：D

解析：$S=\frac{7}{2}$，$I=2$；　$S=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3$，$I=3$；　$S=4$，$I=4$

循环结束，输出 $S=\log_2 4=2$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2a_5a_8=-8, S_3=a_2+3a_1$，则 $a_1=$（　　）

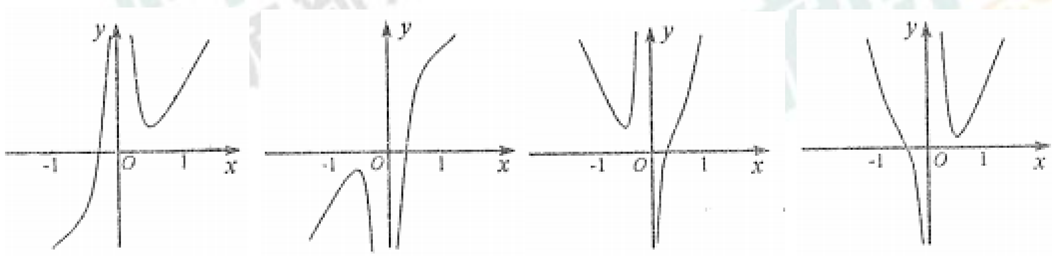
$A.\frac{1}{2}$　　　　$B.-\frac{1}{2}$　　　　$C.-\frac{2}{9}$　　　　$D.-\frac{1}{9}$

考点：等比数列基本量计算

答案：B

解析：$\begin{cases}a_1^{\,3}q^{12}=-8\\ a_1q^2=2a_1\end{cases}$，解得 $a_1=-\frac{1}{2}$

6．函数 $y=x^2+\frac{In|x|}{x}$ 的图像大致为



A　　　　　　B　　　　　　C　　　　　　D

考点：函数的性质

答案：C

解析：函数 $f(x)=x^2+\frac{In|x|}{x}=\begin{cases}x^2+\frac{Inx}{x}(x>0)\\ x^2+\frac{In(-x)}{x}(x<0)\end{cases}$，

又 $f(-1)=(-1)^2+\frac{In1}{-1}=1-0=1>0$， $f(1)=(1)^2+\frac{In1}{1}=1-0=1>0$，排除 A,B，

当 $-1<x<0$ 时，有 $In(-x)<0,x<0$，$x^2>0$，故 $f(x)=x^2+\frac{In(-x)}{x}>0$，排除 D，故选 C。

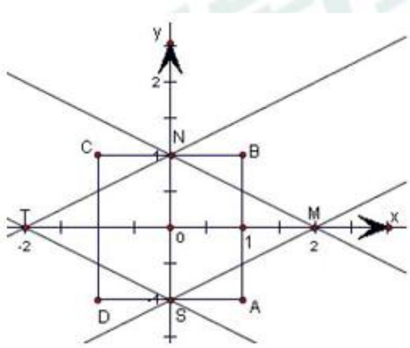
7.已知不等式 $ax-2by\le 2$ 在平面区域 $\{(x,y)||x|\le 1且|y|\le 1\}$ 上恒成立，若 $a+b$ 的最大值和最小值分别为 M 和 m，则 Mm 的值为

$A.4$　　　　　　$B.2$　　　　　　$C.-4$　　　　　　$D.-2$

考点：线性规划约束条件下的多元参数的最值问题

答案：C

解析：



令 $z=ax-2by$, $\because ax-2by\le 2$ 恒成立，即函数 $z=ax-2by$ 在可行域要求的条件下，$z_{max}=2$ 恒成立。当直线 $ax-2by\text{-}z=0$ 过点 $(1,1)$ 或点 $(1,-1)$ 或点 $(-1,1)$ 或点 $(-1,-1)$ 时，有：

$\begin{cases}a-2b\le 2\\ a+2b\le 2\\ -a-2b\le 2\\ -a+2b\le 2\end{cases}$，点 $P(a,b)$ 形成的图形是图中的菱形 $MNTS$.则令 $a+b\text{=}s$，则直线 $a+b\text{=}s$ 过点 $M(2,0)$ 时最大，最大为 $M=2$，

点 $T(-2,0)$ 时最小，最小为 $m=-2$，所以 $Mm=-4$

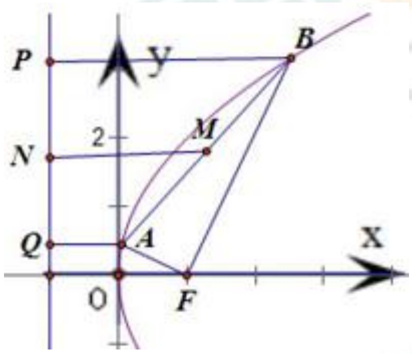
8.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l, A, B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB=60^\circ$。设线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N，则

A.$|AB|\ge 2|MN|$　　B.$2|AB|\ge 3|MN|$　　C.$|AB|\ge 3|MN|$　　D.$|AB|\ge|MN|$

考点：抛物线的性质，抛物线定义

答案：　D

解析：



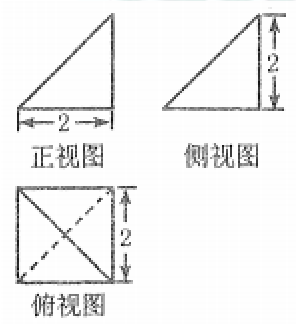
设 $|AF|=a, |BF|=b, A, B$ 在准线上的射影点分别为 Q、P，连接 AQ、BP，由抛物线定义得 $|AF|=|AQ|, |BF|=|BP|$，在梯形 $ABPQ$ 中根据中位线定理，得 $2|MN|=|AQ|+|BP|=a+b$．由余弦定理得

$|AB|^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=a^2+b^2-ab$，配方得 $|AB|^2=(a+b)^2-3ab$，又因为 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$，

所以 $(a+b)^2-3ab\ge(a+b)^2-3(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}(a+b)^2$，得到 $|AB|\ge\frac{1}{2}(a+b)$。所以 $\frac{|MN|}{|AB|}\le\frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{1}{2}(a+b)}=1$，即 $|AB|\ge|MN|$

9.某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是

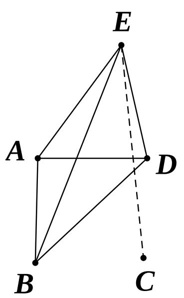
A.$\frac{4}{3}$　　B.$\frac{8}{3}$　　C.2　　D.4



考点：利用三视图探究空间几何体

答案：A

解析：由三视图可知，该几何体是一个三棱锥，如图所示，底面 ABD 为等腰直角三角形，侧面 $ECD\perp$ 底面 ABD，顶点 E 在底面 ABD 的射影点 C 恰好形成矩形 $ABCD$，所以 $AB=2, AD=2, EC=2$，$V_{E-ABD}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$



10.已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, 若 $f(\frac{\pi}{4})=2, f(\pi)=0,$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 上具有单调性，那么 ω 的取值共有

A.6个　　B.7个　　C.8个　　D.9个

考点：三角函数的单调性，周期

答案： D

解析：由 $f(\frac{\pi}{4})=2, f(\pi)=0$ 知，$\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}=\frac{(2n-1)T}{4}(n\in N^*)$，则 $T=\frac{3\pi}{(2n-1)}(n\in N^*)$,又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 上具有单调性，

故 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\le\frac{T}{2}$，则 $\frac{\pi}{12}\le\frac{3\pi}{2(2n-1)}$，$2n-1\le18, n\le\frac{19}{2}$，又 $n\in N^*$，所以 n 最大值为 9，

故 n 的可能取值有 $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 共 9 个，所以 ω 的取值共有 9 个。

11.三棱锥 $D-ABC$ 中，$CD\perp$ 底面ABC，ΔABC 为正三角形，若 $AE//CD, AB=CD=AE=2$，则三棱锥 $D-ABC$ 与三棱锥 $E-ABC$ 的公共部分构成的几何体的外接球的体积为(　)

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$　　B. $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$　　C. $\frac{20}{3}\pi$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{2}\pi$

考点：共面共点、外接球

答案：B

解析：由题知：连接 CE,AD 交于点 P，则 P-ABC 即为公共的三棱锥，且侧面 PAC 为等腰直角三角形，且垂直于底面，故球心位于底面的外心上，即底面三角形 ABC 的外接圆半径即为球半径, $R=r=\frac{2}{\sqrt{3}}, V=\frac{4}{3}\pi(\frac{2}{\sqrt{3}})^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$

12.设函数 $f(x)=x^2-x\ln x+2$，若存在区间 $[a,b]\subseteq[\frac{1}{2},+\infty)$，使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[k(a+2),k(b+2)]$，则 k 的取值范围是(　)

A. $(1,\frac{9+2\ln 2}{4})$　　B. $\left[1,\frac{9+2\ln 2}{4}\right]$　　C. $(1,\frac{9+2\ln 2}{10}]$　　D. $\left[1,\frac{9+2\ln 2}{10}\right]$

考点：函数的同构，求切线方程

答案：C

解析：由题意得：在 $[a,b]$ 上，$f(x)$ 与 $y=k(x+2)$ 有 2 个不同交点，求导得：$f'(x)=2x-\ln x-1, f''(x)=2-\frac{1}{x}$

$x\ge\frac{1}{2}$ 时，$f''(x)=2-\frac{1}{x}>0$, 故$f'(x)$递增，$f'(\frac{1}{2})=\ln 2>0$，故此时 $f(x)$ 递增且为凹函数，故 k 的临界状态为切线斜率及点（-2,0）与点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 连线的斜率

相切时有：设切点为（x_0, y_0）$2x_0-\ln x_0-1=\frac{x_0^2-x_0\ln x_0+2}{x_0+2}$，整理解得：$x_0=1$，故切线 k_1 斜率为 1

割线时有：$k_2=\frac{(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}+2}=\frac{\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\ln 2}{\frac{5}{2}}=\frac{9+2\ln 2}{10}$

故为 $(1,\frac{9+2\ln 2}{10}]$

二、填空题：本大题共四道，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在多项式 $(1+2x)^6(1+y)^5$ 的展开式中，xy^3 的系数为________.

考点：二项式定理

答案：120

解析：xy^3 的系数为 $C_6^1\cdot 2\cdot C_5^2=120$

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 F，过点 F 向双曲线的一条渐近线引垂线，垂足为 M，交另一条渐近线于 N．若 $2\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{FN}$，则双曲线的离心率 $e=$________.

考点：双曲线的性质

答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：由题易知 $MF=b$，所以 $FN=2b$，进一步有，$\tan\angle MOF=\frac{b}{a}$, $\tan\angle MON=\frac{3b}{a}$，又因为 $2\angle MOF=\angle MON$，则有 $\frac{3b}{a}=\frac{2\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，

即 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

15. 某人在微信群中发了一个 7 元“拼手气”红包，被甲、乙、丙三人抢完，若三人均领到整数元，且每人至少领到 1 元，则甲领取的钱数不少于其他任何人的概率是________.

考点：排列组合

答案：$\frac{2}{5}$

解析：将 7 元分成 3 份，可能性有 $(5,1,1),(4,2,1),(3,3,1),(3,2,2)$，其中第一，三，四种分法有 3 种情况，第二种分法有 6 种，其中符合最佳手气的有 6 种，故概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

16.数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0,a_n-a_{n-1}-1=2(n-1)(n\in N^*,n\geq 2)$,若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=n\cdot\sqrt{a_{n+1}+1}\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-1}$，则数列 $\{b_n\}$ 的最大项为第____项

考点：累加法求数列通项、数列的单调性和最值

答案：6

解析：移项整理得：$a_n=a_{n-1}+2n-1$

可得类比式：$\begin{matrix} a_n=a_{n-1}+2n-1 \\ a_{n-1}=a_{n-2}+2n-3 \\ \ldots \\ a_2=a_1+3 \end{matrix}$，累加可得：$a_n=a_1+2\cdot\frac{(n-1)(3+2n-1)}{2}=n^2-1$

有：$\sqrt{a_{n+1}+1}=n+1$

所以 $b_n=n(n+1)\cdot(\frac{8}{11})^{n-1}$，类比得 $b_{n+1}=(n+1)(n+2)(\frac{8}{11})^n$

$$b_{n+1}-b_n=(n+1)(\frac{8}{11})^{n-1}((n+2)\frac{8}{11}-n)=(n+1)(\frac{8}{11})^{n-1}\frac{8n+16-11n}{11}=(n+1)(\frac{8}{11})^{n-1}\frac{16-3n}{11}$$

故 $n\leq 5$ 时上式为正，数列递增，$n\geq 6$ 时上式为负，数列递减，且 $b_6-b_5>0$，$b_6-b_7<0$，所以最大项为第 6 项

三、解答题：本大题共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. ΔABC的内角为 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\frac{a}{\cos C\sin B}=\frac{b}{\sin B}+\frac{c}{\cos C}$.

(1) 求 $\sin(A+B)+\sin A\cos A+\cos(A-B)$ 的最大值；

(2) 若 $b=\sqrt{2}$，当 ΔABC的面积最大时，ΔABC的周长；

考点：解三角形与不等式

解析：（1）由 $\frac{a}{\cos C\sin B}=\frac{b}{\sin B}+\frac{c}{\cos C}$ 得；$\frac{a}{\cos C\sin B}=\frac{b\cos C+c\sin B}{\sin B\cos C}$

$a=b\cos C+c\sin B$ 即 $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$

$\cos B=\sin B$ $B=\frac{\pi}{4}$；

由 $\sin(A+B)+\sin A\cos A+\cos(A-B)=\sqrt{2}(\sin A+\cos A)+\sin A\cos A$

令 $t=\sin A+\cos A$， 原式 $=\frac{1}{2}t^2+\sqrt{2}t-\frac{1}{2}$

当且仅当 $A=\frac{\pi}{4}$ 时， 上式的最大值为 $\frac{5}{2}$。

（2）

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， 即 $2=a^2+c^2-\sqrt{2}ac\geq(2-\sqrt{2})ac$，$ac\leq 2+\sqrt{2}$，当且仅当 $a=c=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 等号成立； $S_{MAX}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，

周长 $L=a+b+c=2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}$ 。

18 .某校倡导为特困学生募捐，要求在自动购水机处每购买一瓶矿泉水，便自觉向捐款箱中至少投入一元钱。现统计了连续 5 天的售出矿泉水箱数和收入情况，列表如下：

售出水量 x(单位：箱)	7	6	6	5	6
收入 y(单位：元)	165	142	148	125	150

学校计划将捐款以奖学金的形式奖励给品学兼优的特困生，规定：特困生综合考核前 20 名，获一等奖学金 500 元；综合考核 21-50 名，获二等奖学金 300 元；综合考核 50 名以后的不获得奖学金

(1)若 x 与 y 成线性相关，则某天售出 9 箱水时，预计收入为多少元?

(2)甲乙两名学生获一等奖学金的概率均为 $\frac{2}{5}$，获二等奖学金的概率均为 $\frac{1}{3}$，不获得奖学金的概率均为 $\frac{4}{15}$，已知甲乙两名学生获得哪个等级的奖学金相互独立的，求甲乙两名学生所获得奖学金之和 X 的分布列及数学期望；

附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$， $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$

考点：线性回归方程求法，分布列与期望求法

解析：(1) $\overline{x}=6,\overline{y}=146$，经计算 $\hat{b}=20,a=26$，所以线性回归方程为 $\hat{y}=20x+26$，

当 $x=9$ 时， y 的估计值为 206 元；

(2)X 的可能取值为 0,300,500,600,800,1000;

$P(X=0)=\frac{4}{15}\times\frac{4}{15}=\frac{16}{225}$

$P(X=300)=2\times\frac{4}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{45}$

$P(X=500)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{15}=\frac{16}{75}$

$P(X=600)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

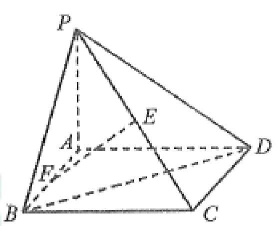
$P(X=800)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$

$P(X=1000)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

X	0	300	500	600	800	1000
P	$\frac{16}{225}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{16}{75}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{25}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=600$

19.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面$ABCD$是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，$PA\perp BD$



（Ⅰ）求证：$PB=PD$

（Ⅱ）若 E,F 分别为 PC,AB 的中点，$EF\perp$平面PCD，求直线 PB 与平面PCD 所成角的大小

考点：立体几何证明，空间向量计算

解析：（1）连接 AC,BD 交于点 O，连接 PO，$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AC\perp BD, OB=OD$

又 $PA\perp BD, PA\subset$平面$PAC, AC\subset$平面$PAC, PA\cap AC=A$

$\therefore BD\perp$平面PAC, $\because PO\subset$平面PAC, $\therefore BD\perp PO$

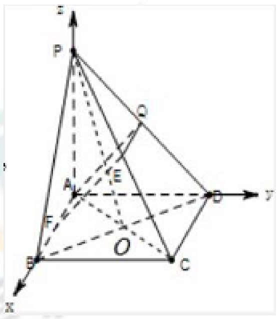
又 $OB=OD$, $\therefore PB=PD$

（2）设 PD 的中点为 Q，连接 AQ,EQ，则 $EQ//CD, EQ=\frac{1}{2}CD$，

又 $AF//CD$，$AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$，$\therefore EQ//AF, EQ=AF$

$\therefore$ 四边形 $AQEF$ 为平行四边形，$\therefore EF//AQ$

$\because EF\perp$平面PCD，$\therefore AQ\perp$平面PCD



$\therefore AQ\perp PD$，$\because Q$ 是 PD 的中点，$\therefore AP=AD=\sqrt{2}$

$\because AQ\perp$平面PCD, $\therefore AQ\perp CD$，又 $AD\perp CD, AQ\cap AD=A$

$\therefore CD\perp$平面PAD, $\therefore CD\perp PA$

又 $BD\perp PA, BD\cap CD=D$，$\therefore PA\perp$平面$ABCD$

以 A 为坐标原点，以 AB,AD,AP 为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B(\sqrt{2},0,0), P(0,0,\sqrt{2}), A(0,0,0), Q(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$，$\because AQ\perp$ 平面PCD，$\therefore \overrightarrow{AQ}$ 为 平面PCD 的一个法向量

$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}=-\frac{1}{2}$

设直线 PB 与平面 PCD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle \overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}\right\rangle\right|=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 直线 PB 与平面 PCD 所成角为 $\frac{\pi}{6}$

20.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，右焦点为 $F_2(1,0)$，点 $B(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上。

1）求椭圆方程

2）若直线 $l:y=k(x-4)(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点，已知直线 A_1M 与 A_2N 相交于点 G，证明：点 G 在定直线上，并求出定直线的方程。

考点：圆锥曲线综合，椭圆的对称性

解析：（1）$F_2(1,0)$，$\therefore c=1$，由题目已知条件知 $\begin{cases} a^2=1+b^2 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$ $\therefore a=2,b=\sqrt{3}$，所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）由椭圆对称性知 G 在 $x=x_0$ 上，假设直线 l 过椭圆上顶点，则 $M(0,\sqrt{3})$，

$\therefore k=-\frac{\sqrt{3}}{4},N(\frac{8}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5})$，$l_{A_1M}:y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2),l_{A_2N}:y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-2),\therefore G(1,\frac{3\sqrt{3}}{2})$，所以 G 在定直线 $x=1$ 上。

当 M 不在椭圆顶点时，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

$\begin{cases} y=k(x-4) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$

$l_{A_1M}:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),l_{A_2N}:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，当 $x=1$ 时，$\frac{3y_1}{x_1+2}=\frac{-y_2}{x_2-2}$ 得 $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$

所以 $2\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-5\frac{32k^2}{3+4k^2}+\frac{8(3+4k^2)}{3+4k^2}=0$ 显然成立，所以 G 在定直线 $x=1$ 上。

21. $f(x)=a(x-1),g(x)=(ax-1)e^x,a\in R.$

（1）证明：存在唯一实数 a，使得直线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 相切。

（2）若不等式 $f(x)>g(x)$ 有且只有两个整数解，求 a 的范围。

考点：（1）切线方程，隐零点问题。（2）整数解问题，参变分离。

解：（1）设切点为 (x_0,y_0)，则 $y_0=a(x_0-1)=(ax_0-1)e^{x_0},a(x_0e^{x_0}-x_0+1)=e^{x_0}$①，

$y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 相切，则 $a=g'(x_0)=(a+ax_0-1)e^{x_0},a(x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1)=e^{x_0}$②，所以 $x_0e^{x_0}-x_0+1=x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1$，

即 $e^{x_0}+x_0-2=0$。令 $h(x)=e^x+x-2,h'(x)=e^x+1>0$，所以 $h(x)$ 单增。又因为 $h(0)=-1<0$，$h(1)=e-1>0$，所以，存在唯一实数 x_0，使得 $e^{x_0}+x_0-2=0$, 且 $x_0\in(0,1)$。所以只存在唯一实数 a，使①②成立，即存在唯一实数 a 使得 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 相切。

(2)令 $f(x)>g(x)$，即 $a(x-1)>(ax-1)e^x$，所以 $a(x-\frac{x-1}{e^x})<1$

令 $m(x)=x-\frac{x-1}{e^x}$，则 $m'(x)=\frac{e^x+x-2}{e^x}$，由(1)可知，$m(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单减，在 $(x_0,+\infty)$ 单增，且 $x_0\in(0,1)$

故当 $x\le 0$ 时，$m(x)\ge m(0)=1$，当 $x\ge 1$ 时，$m(x)\ge m(1)=1$，

当 $a<0$ 时，因为要求整数解，所以 $m(x)$ 在 $x\in Z$ 时，$m(x)\ge 1$，所以 $am(x)<1$ 有无穷多整数解，舍去；

当 $0<a<1$ 时，$m(x)<\frac{1}{a}$，又 $\frac{1}{a}>1, m(0)=m(1)=1$，所以两个整数解为 0,1，即 $\begin{cases} m(2)\ge\frac{1}{a} \\ m(-1)\ge\frac{1}{a}\end{cases}$

所以 $a\ge\frac{e^2}{2e^2-1}$，即 $a\in[\frac{e^2}{2e^2-1},1)$

当 $a\ge 1$ 时，$m(x)<\frac{1}{a}$，因为 $\frac{1}{a}\le 1, m(x)$ 在 $x\in Z$ 内大于或等于 1，

所以 $m(x)<\frac{1}{a}$ 无整数解，舍去

综上，$a\in[\frac{e^2}{2e^2-1},1)$

22.在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 过点 $P(a,1)$，其参数方程为 $\begin{cases} x=a+\sqrt{2}t, \\ y=1+\sqrt{2}t\end{cases}$（ t 为参数，aÎ R ）,以 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $r\cos^2 q+4\cos q-r=0$

（1）求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）求已知曲线 C_1 和曲线 C_2 交于 A,B 两点，且 $|PA|=2|PB|$,求实数 a 的值。

考点:参数方程极坐标方程和直角坐标方程的互化，直线的参数方程中 t 的几何意义

解析:

（1）C_1 的参数方程 $\begin{cases} x=a+\sqrt{2}t, \\ y=1+\sqrt{2}t\end{cases}$ 消参得普通方程为 $x-y-a+1=0$

C_2 的极坐标方程为 $r\cos^2 q+4\cos q-r=0$ 两边同乘 r 得 $r^2\cos^2 q+4r\cos q-r^2=0$ 即 $y^2=4x$

（2）将曲线 C_1 的参数方程标准化为 $\begin{cases} x=a+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（ t 为参数，aÎ R ）代入曲线 C_2：$y^2=4x$ 得 $\frac{1}{2}t^2-\sqrt{2}t+1-4a=0$ 由

$D=(-\sqrt{2})^2-4?\frac{1}{2}(1\quad 4a)>0$ 得 $a>0$

设 A,B 对应的参数为 t_1,t_2，由题得 $|t_1|=2|t_2|$ 即 $t_1=2t_2$ 或 $t_1=-2t_2$

当 $t_1=2t_2$ 时，$\begin{cases}t_1=2t_2\\t_1+t_2=2\sqrt{2}\\t_1t_2=2(1-4a)\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{36}$

当 $t_1=-2t_2$ 时，$\begin{cases}t_1=-2t_2\\t_1+t_2=2\sqrt{2}\\t_1t_2=2(1-4a)\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{9}{4}$

综上：$a=\dfrac{1}{36}$ 或 $\dfrac{9}{4}$

22.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+m|+|2x-1|$。

（1）当 $m=-1$ 时，求不等式 $f(x)\le 2$ 的解集；

（2）若 $f(x)\le|2x+1|$ 的解集包含 $[\dfrac{3}{4},2]$，求 m 的取值范围。

考点：绝对值不等式

解析：（1）当 $m=-1$ 时，$f(x)=|x-1|+|2x-1|$，

①当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=3x-2\le 2$，解得 $1\le x\le\dfrac{4}{3}$；

②当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$f(x)=x\le 2$，解得 $\dfrac{1}{2}<x<1$；

③当 $x\le\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=2-3x\le 2$，解得 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$

综合①②③可知，原不等式的解集为 $\{x|0\le x\le\dfrac{4}{3}\}$

（2）由题意可知 $f(x)\le|2x+1|$ 在 $[\dfrac{3}{4},2]$ 上恒成立，当 $x\in[\dfrac{3}{4},2]$ 时，$f(x)=|x+m|+|2x-1|=|x+m|+2x-1\le|2x+1|=2x+1$，从而可得 $|x+m|\le 2$，即 $-2\le x+m\le 2\Leftrightarrow -2-x\le m\le 2-x$，且 $(-2-x)_{\max}=-\dfrac{11}{4},(2-x)_{\min}=0$，因此 $m\in[-\dfrac{11}{4},0]$