

八年级数学测试试题卷（人教版）

参考答案与试题解析

一．选择题（共6小题）

1. 如果对于某一特定范围内的任意允许值， $p = |1 - 2x| + |1 - 3x| + \dots + |1 - 9x| + |1 - 10x|$ 的值恒为一常数，则此值为（ ）

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【考点】：绝对值．

【分析】若 P 为定值，则化简后 x 的系数为 0，由此可判定出 x 的取值范围，然后再根据绝对值的性质进行化简．

【解答】解： $\because P$ 为定值，

$\therefore P$ 的表达式化简后 x 的系数为 0；

由于 $2+3+4+5+6+7=8+9+10$ ；

$\therefore x$ 的取值范围是： $1 - 7x \geq 0$ 且 $1 - 8x \leq 0$ ，即 $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{7}$ ；

所以 $P = (1 - 2x) + (1 - 3x) + \dots + (1 - 7x) - (1 - 8x) - (1 - 9x) - (1 - 10x) = 6 - 3 = 3$ ．

故选 B．

【点评】能够根据 P 为常数的条件判断出 x 的取值范围，是解答此题的关键．

2. 有三组数 x_1, x_2, x_3 ； y_1, y_2, y_3 ； z_1, z_2, z_3 ，它们的平均数分别是 a, b, c ，

那么 $x_1 + y_1 - z_1, x_2 + y_2 - z_2, x_3 + y_3 - z_3$ 的平均数是（ ）

A. $\frac{a+b+c}{3}$ B. $\frac{a+b-c}{3}$ C. $a+b-c$ D. $3(a+b-c)$

【考点】：算术平均数．

【分析】只要运用求平均数公式： $x_{\text{平均}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 即可求出。

【解答】解： $\therefore x_1, x_2, x_3$ 的平均数 $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = a$ ， y_1, y_2, y_3 的平均数 $\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = b$ ， z_1, z_2, z_3 的平均数 $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = c$

$\therefore x_1 + y_1 - z_1 + x_2 + y_2 - z_2 + x_3 + y_3 - z_3$ 的平均数

$$= \frac{1}{3}(x_1 + y_1 - z_1 + x_2 + y_2 - z_2 + x_3 + y_3 - z_3)$$
$$= \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) - (z_1 + z_2 + z_3)]$$
$$= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) - \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$
$$= a + b - c.$$

故选 C。

【点评】本题考查的是样本平均数的求法，熟记公式是解决本题的关键。

3. 对正整数 n ，记 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ，则 $1! + 2! + 3! + \dots + 10!$ 的末尾数为 ()

A. 0 B. 1 C. 3 D. 5

【考点】：规律型：数字的变化类。

【分析】根据 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ 得到 $1! = 1$ ， $2! = 1 \times 2 = 2$ ， $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ， $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ ，且 $5!$ 、 $\dots$ 、 $10!$ 的数中都含有 2 与 5 的积，则 $5!$ 、 $\dots$ 、 $10!$ 的末尾数都是 0，于是得到 $1! + 2! + 3! + \dots + 10!$ 的末尾数为 3。

【解答】解： $\therefore 1! = 1$ ， $2! = 1 \times 2 = 2$ ， $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ， $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ ，

而 $5!$ 、 $\dots$ 、 $10!$ 的数中都含有 2 与 5 的积，

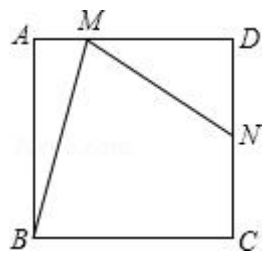
$\therefore 5!$ 、 $\dots$ 、 $10!$ 的末尾数都是 0，

$\therefore 1! + 2! + 3! + \dots + 10!$ 的末尾数为 3。

故选 C。

【点评】本题考查了规律型：数字的变化类：通过特殊数字的变化规律探讨一般情况下的数字变化规律．

4. 在正方形 ABCD 中，N 是 DC 的中点，M 是 AD 上异于 D 的点，且 $\angle NMB = \angle MBC$ ，则 $\tan \angle ABM$ 的值为（ ）



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【考点】：解直角三角形：正方形的性质：相似三角形的判定与性质．

【分析】根据 $\angle NMB = \angle MBC$ ，延长 MN，BC 相交于 T，得到等腰 $\triangle TBM$ ，连接点 T 和 MB 的中点，得到相似三角形，然后由相似三角形的性质进行计算，求出 $\angle ABM$ 的正切．

【解答】解：如图：延长 MN 交 BC 的延长线于 T，设 MB 的中点为 O，连 TO，则 $OT \perp BM$ ，

$$\therefore \angle ABM + \angle MBT = 90^\circ,$$

$$\angle OTB + \angle MBT = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle OTB, \text{ 则 } \triangle BAM \sim \triangle TOB,$$

$$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{OB}{BT}, \text{ 即 } MB^2 = 2AM \cdot BT \quad ①$$

$$\text{令 } DN=1, CT=MD=k, \text{ 则: } AM=2-k, BM=\sqrt{4+(2-k)^2}, BT=2+k,$$

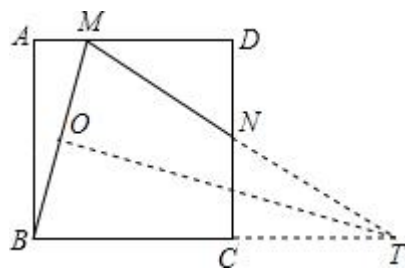
$$\text{代入①中得: } 4+(2-k)^2=2(2-k)(2+k),$$

解方程得： $K_1=0$ （舍去）， $K_2=\frac{4}{3}$ 。

$$\therefore AM = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

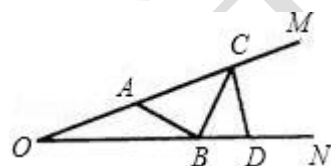
$$\frac{AM}{AB} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

故选 A。



【点评】本题考查的是解直角三角形，运用正方形的性质，根据题目中角的关系，判断两个三角形相似，然后用相似三角形的性质进行计算，求出直角三角形中边的长度，再用正切的定义求出角的正切值。

5. 如图，设 $\angle MON=20^\circ$ ，A 为 OM 上一点， $OA=4\sqrt{3}$ ，D 为 ON 上一点， $OD=8\sqrt{3}$ ，C 为 AM 上任意一点，B 是 OD 上任意一点，那么折线 ABCD 的长 $AB+BC+CD$ 的最小值是（ ）



A. 8 B. 12 C. 10 D. $10\sqrt{3}$

【考点】：轴对称 - 最短路线问题。

【分析】先分别作 A、D 关于 ON、OM 的对称点 A'、D' 点，连接 A'B、CD'、A'D'，根据对称的性质可得 $A'B=AB$ ， $CD'=CD$ ，再由勾股定理即可求出 A'D' 的长，由两点之间线段最短可得 A'D' 的长即为折线 ABCD 的长的最小值。

【解答】解：如图，分别作 A、D 关于 ON、OM 的对称点 A'、D' 点，连接 A'B、CD'、A'D'，OD'，OA'，

则 $A'B=AB$ ， $CD'=CD$ ，

$\therefore AB+AC+CD \geq A'B+BC+CD'$ ，

显然 $A'B+BC+CD' \geq A'D'$ ，

$\therefore \angle A'ON = \angle NOM = \angle MOD' = 20^\circ$ ， $\therefore \angle D'OA' = 60^\circ$ ，

又 $OA' = OA = 4\sqrt{3}$ ， $OD' = OD = 8\sqrt{3}$ ，即 $\frac{OA'}{OD'} = \frac{1}{2}$ ，

而 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \cos 60^\circ = \frac{OA'}{OD'}$ ，

$\therefore \triangle D'OA'$ 为直角三角形，且 $\angle OA'D' = 90^\circ$ ，

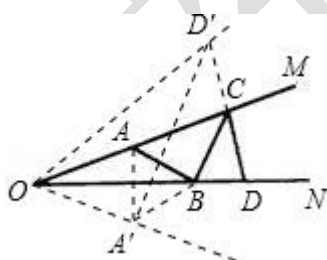
$\therefore A'D' = \sqrt{(OD')^2 - (OA')^2}$

$= \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2}$ ，

$= 12$ 。

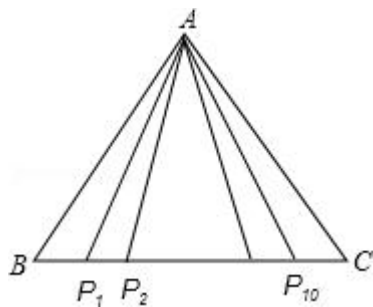
故折线 ABCD 的长的最小值为 12。

故选 B。



【点评】本题考查的是最短线路问题，根据轴对称的性质作出图形是解答此类题目的关键。

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=2$ ，BC 边上有 10 个不同的点 $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ ，记 $M_i = AP_i^2 + P_iB \cdot P_iC$ ($i=1, 2, \dots, 10$)，那么 $M_1 + M_2 + \dots + M_{10}$ 的值为 ()



A . 36 B . 38 C . 40 D . 42

【考点】：等腰三角形的性质；勾股定理。

【分析】作 $AD \perp BC$ 于 D . 根据勾股定理，得 $AP_i^2 = AD^2 + DP_i^2 = AD^2 + (BD - BP_i)^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot BP_i + BP_i^2$, $P_i B \cdot P_i C = P_i B \cdot (BC - P_i B) = 2BD \cdot BP_i - BP_i^2$, 从而求得 $M_i = AD^2 + BD^2$, 即可求解 .

【解答】解：作 $AD \perp BC$ 于 D , 则 $BC = 2BD = 2CD$.

根据勾股定理，得

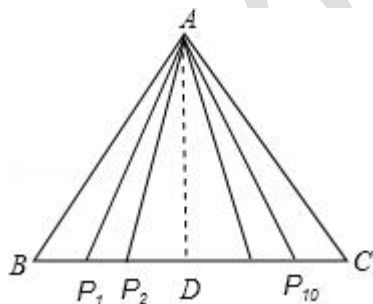
$$AP_i^2 = AD^2 + DP_i^2 = AD^2 + (BD - BP_i)^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot BP_i + BP_i^2 ,$$

$$\text{又 } P_i B \cdot P_i C = P_i B \cdot (BC - P_i B) = 2BD \cdot BP_i - BP_i^2 ,$$

$$\therefore M_i = AD^2 + BD^2 = AB^2 = 4 ,$$

$$\therefore M_1 + M_2 + \dots + M_{10} = 4 \times 10 = 40 .$$

故选 C .



【点评】此题主要运用了勾股定理和等腰三角形三线合一的性质 .

二. 填空题 (共 6 小题)

7. 已知方程组 $\begin{cases} a_1x + y = c_1 \\ a_2x + y = c_2 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$ 则关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1x - y = a_1 + c_1 \\ a_2x + y = a_2 + c_2 \end{cases}$

的解是 $\begin{cases} x = 6 \\ y = -10 \end{cases}$.

【考点】：二元一次方程组的解.

【分析】将方程组 $\begin{cases} a_1x - y = a_1 + c_1 \\ a_2x + y = a_2 + c_2 \end{cases}$ 变形为 $\begin{cases} a_1(x-1) + (-y) = c_1 \\ a_2(x-1) + (-y) = c_2 \end{cases}$ ，根据方程组

$\begin{cases} a_1x + y = c_1 \\ a_2x + y = c_2 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$ ，得出 $\begin{cases} x-1 = 5 \\ -y = 10 \end{cases}$ ，进而求解即可.

【解答】解： $\because$ 方程组 $\begin{cases} a_1x - y = a_1 + c_1 \\ a_2x + y = a_2 + c_2 \end{cases}$ 可变形为 $\begin{cases} a_1(x-1) + (-y) = c_1 \\ a_2(x-1) + (-y) = c_2 \end{cases}$ ，

又： $\because$ 方程组 $\begin{cases} a_1x + y = c_1 \\ a_2x + y = c_2 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} x-1 = 5 \\ -y = 10 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = 6 \\ y = -10 \end{cases}.$$

故答案为 $\begin{cases} x = 6 \\ y = -10 \end{cases}$.

8. 设 $a = \sqrt[3]{3}$ ， b 是 a^2 的小数部分，则 $(b+2)^3$ 的值为 9.

【考点】：估算无理数的大小.

【分析】根据平方运算，可得 a^2 ，根据 b 是 a^2 的小数部分，可得 b 的值，再根据乘方，可得答案.

【解答】解： $a^2 = (\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{9}$ ，

$$2 < \sqrt[3]{9} < 3，$$

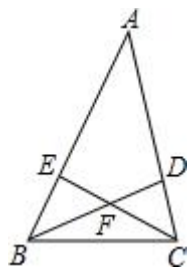
$$b = \sqrt[3]{9} - 2,$$

$$(b+2)^3 = (\sqrt[3]{9} - 2 + 2)^3 = (\sqrt[3]{9})^3 = 9,$$

故答案为：9.

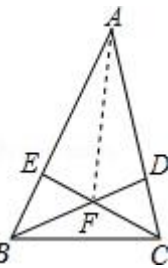
【点评】本题考查了估算无理数的大小，先经过估算，得出 b 的值，再经过乘方得出答案.

9. 如图，点 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC, AB 上的点，直线 BD 与 CE 交于点 F ，已知 $\triangle CDF, \triangle BFE, \triangle BCF$ 的面积分别是 3, 4, 5，则四边形 $AEFD$ 的面积是 $\frac{204}{13}$ 。



【考点】：面积及等积变换。

【分析】连接 AF ，根据三角形面积公式求出 $\frac{BF}{DF} = \frac{5}{3}$ ， $\frac{CF}{EF} = \frac{5}{4}$ ，根据三角形面积公式求出 $\frac{S_{\triangle AEF} + 4}{S_{\triangle AFD} + 3} = \frac{BF}{FD}$ ， $\frac{S_{\triangle AFD} + 3}{S_{\triangle AEF} + 4} = \frac{CF}{EF}$ ，即可求出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ADF$ 的面积，即可求出答案。



【解答】解：如图，连接 AF ，

$\because \triangle CDF, \triangle BFE, \triangle BCF$ 的面积分别是 3, 4, 5，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{BF}{DF}, \frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{BF}{DF} = \frac{5}{3}, \frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{BF}{DF}, \frac{S_{\triangle AEF} + 4}{S_{\triangle AFD}} = \frac{S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BFE}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{BF}{FD} = \frac{5}{3},$$

$$\frac{S_{\triangle AFD} + 3}{S_{\triangle AEF}} = \frac{S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle AFE}} = \frac{CF}{FE} = \frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle BFE}} = \frac{5}{4},$$

$$\text{解得: } S_{\triangle AEF} = \frac{108}{13}, S_{\triangle AFD} = \frac{96}{13}.$$

$$\therefore \text{四边形 AEFD 的面积是 } S_{\triangle AEF} + S_{\triangle ADF} = \frac{108}{13} + \frac{96}{13} = \frac{204}{13}$$

$$\text{故答案为: } \frac{204}{13}.$$

【点评】本题考查了三角形的面积的应用，注意：等高的三角形的面积比等于对应边之比。

10. 已知：m, n, p 均是实数，且 $mn + p^2 + 4 = 0$ ， $m - n = 4$ ，则 $m + n = \underline{0}$ 。

【考点】：完全平方公式。

【分析】由 $mn + p^2 + 4 = 0$ 可得出 $mn = -p^2 - 4$ ；将 $m - n = 4$ 的左右两边同时乘方，根据完全平方公式两公式之间的联系整理出 $(m + n)^2$ ，然后开方即可求出 $m + n$ 的值。

【解答】解： $\because mn + p^2 + 4 = 0$ ， $m - n = 4$ ，

$$\therefore mn = -p^2 - 4, (m - n)^2 = 16,$$

$$\therefore (m + n)^2 - 4mn = (m - n)^2 = 16,$$

$$\therefore (m + n)^2 = 16 + 4mn,$$

$$= 16 + 4(-p^2 - 4),$$

$$= -4p^2;$$

$\because m, n, p$ 均是实数，

$$\therefore (m+n)^2 = -4p^2 \geq 0,$$

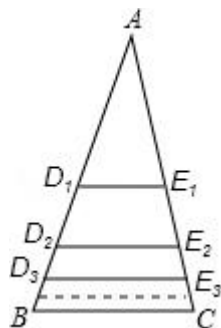
$$\therefore p=0,$$

$$\therefore m+n=0.$$

故答案是：0.

【点评】本题考查了完全平方公式，关键是要灵活运用完全平方公式，整理出 $(m+n)^2$ 的形式.

11. 如图， $\triangle ABC$ 中、 $BC=a$ ，若 D_1 、 E_1 分别是 AB 、 AC 的中点，则 $D_1E_1 = \frac{a}{2}$ ；若 D_2 、 E_2 分别是 D_1B 、 E_1C 的中点，则 $D_2E_2 = \frac{1}{2}(\frac{a}{2} + a) = \frac{3}{4}a$ ；若 D_3 、 E_3 分别是 D_2B 、 E_2C 的中点，则 $D_3E_3 = \frac{1}{2}(\frac{3a}{4} + a) = \frac{7}{8}a$... 若 D_n 、 E_n 分别是 $D_{n-1}B$ 、 $E_{n-1}C$ 的中点，则 $D_nE_n = \frac{2^n - 1}{2^n}a$ ($n \geq 1$ 且 n 为整数).



【考点】梯形中位线定理：三角形中位线定理.

【分析】在 $\triangle ABC$ 中、 $BC=a$ ，若 D_1 、 E_1 分别是 AB 、 AC 的中点，根据中位线定理先分别求出 D_1E_1 ， D_2E_2 ， D_3E_3 ，然后观察规律，从而得出一般形式即可.

【解答】解：在 $\triangle ABC$ 中、 $BC=a$ ，若 D_1 、 E_1 分别是 AB 、 AC 的中点，根据中位线定理得： $D_1E_1 = \frac{a}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1}a$

$$\therefore D_2、E_2 \text{ 分别是 } D_1B、E_1C \text{ 的中点，} \therefore D_2E_2 = \frac{1}{2}(\frac{a}{2} + a) = \frac{3}{4}a = \frac{2^2 - 1}{2^2}a$$

$\because D_3、E_3$ 分别是 $D_2B、E_2C$ 的中点，则 $D_3E_3 = \frac{1}{2}(\frac{3a}{4} + a) = \frac{7}{8}a = \frac{2^3 - 1}{2^3}a$ ，

...

根据以上可得：若 $D_n、E_n$ 分别是 $D_{n-1}B、E_{n-1}C$ 的中点，则 $D_nE_n = \frac{2^n - 1}{2^n}a$ ，

故答案为： $\frac{2^n - 1}{2^n}a$ 。

【点评】本题考查了梯形中位线定理，难度一般，关键是根据特殊找出一般的规律，进而得出答案。

12. 已知 $x=2015a+2014$ ， $y=2015a+2015$ ， $z=2015a+2016$ ，则 $x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx$ 的值为 3。

【考点】：因式分解的应用。

【分析】将 $x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx$ 的各项乘以 2，配成完全平方的形式，然后代入求值。

【解答】解：原式 $= \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2zx - 2yz)$
 $= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2]$

$x-y = -1$ ， $y-z = -1$ ， $x-z = -2$ ，

代入得 $\frac{1}{2} (1+1+4) = 3$ 。

故答案为：3。

【点评】本题主要考查了配方法的应用，比较简单，解题的关键是能够将代数式乘以 2 后变为完全平方式。

三．解答题（共5小题）

13．解方程：
$$\frac{12x-10}{4x-3} + \frac{32x-34}{8x-9} = \frac{24x-23}{8x-7} + \frac{16x-19}{4x-5}$$

【考点】解分式方程；分式的变形．

【分析】首先将原方程变为： $(3 - \frac{1}{4x-3}) + (4 + \frac{2}{8x-9}) = (3 - \frac{2}{8x-7}) + (4 + \frac{1}{4x-5})$

然后移项、合并同类项得到： $\frac{2}{8x-9} - \frac{1}{4x-3} = \frac{1}{4x-5} - \frac{2}{8x-7}$ ，

然后将等号两边分别通分化简得： $\frac{3}{(8x-9)(4x-3)} = \frac{3}{(4x-5)(8x-7)}$

然后去分母得： $(4x-5)(8x-7) = (8x-9)(4x-3)$ ，即可求得方程的解．

【解答】解：原方程可变形为： $(3 - \frac{1}{4x-3}) + (4 + \frac{2}{8x-9}) = (3 - \frac{2}{8x-7}) + (4 + \frac{1}{4x-5})$

整理得： $\frac{2}{8x-9} - \frac{1}{4x-3} = \frac{1}{4x-5} - \frac{2}{8x-7}$

$$\therefore \frac{3}{(8x-9)(4x-3)} = \frac{3}{(4x-5)(8x-7)}$$

$$\therefore (4x-5)(8x-7) = (8x-9)(4x-3)$$

整理得 $x=1$

经检验 $x=1$ 是原方程的解．

【点评】本题主要考查的是解分式方程，如何将该分式方程转化为整式方程是解题的关键．

14．某人乘火车时，他看到第一块里程碑上写着一个两位数（十位上的数字为 x ，个位上的数字为 y ）；经过 1 小时，他看到第二块里程碑上写的两位数恰好是

第一块里程碑上的数字互换了位置；又经过 1 小时，他看到第三块里程碑上写着一个三位数，这个三位数恰好是第一块里程碑上的两位数中间加上一个数字 0（长度单位为千米）。

（1）求此人第三次看到的里程碑上的数字；

（2）请求出该火车的速度。

【考点】：二元一次方程组的应用。

【分析】（1）根据速度相等，可得方程组，根据解方程组，可得 $y=6x$ ，根据 x 、 y 都是大于 0 且小于或等于 9 的整数，可得 x 、 y 的值，根据三位数的表示方法，可得答案；

（2）根据速度 $z=9(y-x)$ ，可得答案。

【解答】解：（1）设这个两位数的个位数字是 y ，十位数字是 x ，汽车的速度为 z 千米/小时。由题意得

$$\begin{cases} (10y+x)-(10x+y)=z \\ (100x+y)-(10y+x)=z \end{cases} \quad \text{化简，得} \quad \begin{cases} 9(y-x)=z & \text{①} \\ 9(11x-y)=z & \text{②} \end{cases}$$

由①÷②得 $\frac{y-x}{11x-y}=1$ ，即 $y=6x$

又 $\because 0 \leq x \leq 9, 1 \leq y \leq 9$

$\therefore y$ 只能取 6， $x=1$ ，

当 $x=1, y=6$ 时， $100y+x=601$

此人第三次看到的里程碑上的数字 601。

（2） $z=9(y-x)=9(6-1)=45$ （千米/小时）。

答：汽车的速度是 45 千米/小时。

【点评】本题考查了二元一次方程组的应用，利用速度相等可得出方程组是解题

关键 .

15 . 设三个正数 a 、 b 、 c 满足 $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$, 求证 : a 、 b 、 c 一定是某个三角形的三边长 .

【考点】乘法公式

【分析】首先不等号左边整理可得 : $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$ 进行移项观察并运用完全平方方式可得到 $(a-b)^2 > c^2$, 即可证得 a, b, c 满足三角形三边关系。

【解答】解 : 原式可得 $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 < 0$$

$$a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4 < 4a^2b^2$$

$$(a^2+b^2-c^2)^2 < 4a^2b^2$$

最后整理可得 $(a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2$ 即 $|a-b| < c < a+b$

故正数 a, b, c 满足三角形三边关系 , 一定是某个三角形的三边长。

【点评】本题主要考查的是完全平方公式的运用。

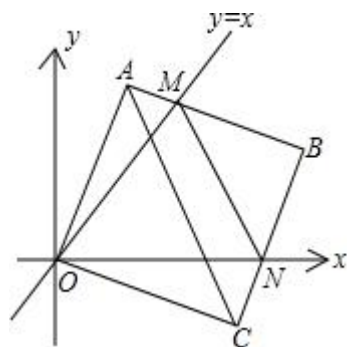
16 . 在平面直角坐标系中 , 边长为 2 的正方形 OABC 的两顶点 A、C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上 , 点 O 在原点 . 现将正方形 OABC 绕 O 点顺时针旋转 , 当 A 点第一次落在直线 $y=x$ 上时停止旋转 , 旋转过程中 , AB 边交直线 $y=x$ 于点 M , BC 边交 x 轴于点 N (如图) .

(1) 求边 OA 在旋转过程中所扫过的面积 ;

(2) 旋转过程中 , 当 MN 和 AC 平行时 , 求正方形 OABC 旋转的度数 ;

(3) 设 $\triangle MBN$ 的周长为 p , 在旋转正方形 OABC 的过程中 , p 值是否有变化 ?

请证明你的结论．



【考点】：坐标与图形变化 - 旋转；全等三角形的判定；正方形的性质；扇形面积的计算．

- 【分析】（1）根据扇形的面积公式来求得边 OA 在旋转过程中所扫过的面积；
（2）解决本题需利用全等，根据正方形一个内角的度数求出 $\angle AOM$ 的度数；
（3）利用全等把 $\triangle MBN$ 的各边整理到成与正方形的边长有关的式子．

【解答】解：（1） $\because$ A 点第一次落在直线 $y=x$ 上时停止旋转，直线 $y=x$ 与 y 轴的夹角是 45° ，

$\therefore$ OA 旋转了 45° ．

$\therefore$ OA 在旋转过程中所扫过的面积为 $\frac{45\pi \times 2^2}{360} = \frac{\pi}{2}$ ．

（2） $\because MN \parallel AC$ ，

$\therefore \angle BMN = \angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle BNM = \angle BCA = 45^\circ$ ．

$\therefore \angle BMN = \angle BNM$ ， $\therefore BM = BN$ ．

又 $\because BA = BC$ ， $\therefore AM = CN$ ．

又 $\because OA = OC$ ， $\angle OAM = \angle OCN$ ， $\therefore \triangle OAM \cong \triangle OCN$ ．

$\therefore \angle AOM = \angle CON = \frac{1}{2} (\angle AOC - \angle MON) = \frac{1}{2} (90^\circ - 45^\circ) = 22.5^\circ$ ．

$\therefore$ 旋转过程中，当 MN 和 AC 平行时，正方形 OABC 旋转的度数为 45° ．

$$22.5^\circ = 22.5^\circ .$$

(3) 在旋转正方形 OABC 的过程中，p 值无变化 .

证明：延长 BA 交 y 轴于 E 点，

则 $\angle AOE = 45^\circ - \angle AOM$ ， $\angle CON = 90^\circ - 45^\circ - \angle AOM = 45^\circ - \angle AOM$ ，

$$\therefore \angle AOE = \angle CON .$$

又 $\because OA = OC$ ， $\angle OAE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle OCN$.

$$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCN .$$

$$\therefore OE = ON, AE = CN .$$

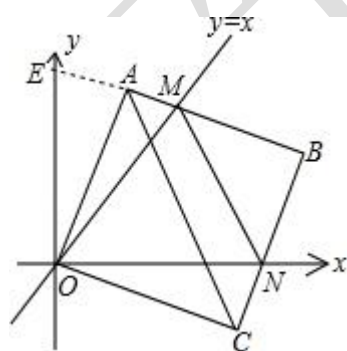
又 $\because \angle MOE = \angle MON = 45^\circ$ ， $OM = OM$ ，

$$\therefore \triangle OME \cong \triangle OMN . \therefore MN = ME = AM + AE .$$

$$\therefore MN = AM + CN ,$$

$$\therefore p = MN + BN + BM = AM + CN + BN + BM = AB + BC = 4 .$$

$\therefore$ 在旋转正方形 OABC 的过程中，p 值无变化 .



【点评】本题用到的知识点是：扇形面积 $= \frac{n\pi r^2}{360}$ ，求一些线段的长度或角的度数，总要整理到已知线段的长度上或已知角的度数上 .

17. 【问题情景】

利用三角形的面积相等来求解的方法是一种常见的等积法，此方法是我们解决几何问题的途径之一。

例如：张老师给小聪提出这样一个问题：

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $AD=6$ ，问 $\triangle ABC$ 的高 AD 与 CE 的比是多少？

小聪的计算思路是：

根据题意得： $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} AB \cdot CE$ 。

从而得 $2AD=CE$ ， $\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{1}{2}$

请运用上述材料中所积累的经验和方法解决下列问题：

(1) 【类比探究】

如图 2，在 $\square ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在 AD 、 CD 上，且 $AF=CE$ ，并相交于点 O ，连接 BE 、 BF ，

求证： BO 平分角 AOC 。

(2) 【探究延伸】

如图 3，已知直线 $m \parallel n$ ，点 A 、 C 是直线 m 上两点，点 B 、 D 是直线 n 上两点，点 P 是线段 CD 中点，且 $\angle APB=90^\circ$ ，两平行线 m 、 n 间的距离为 4。求证：

$PA \cdot PB = 2AB$ 。

(3) 【迁移应用】

如图 4， E 为 AB 边上一点， $ED \perp AD$ ， $CE \perp CB$ ，垂足分别为 D 、 C ， $\angle DAB = \angle B$ ， $AB = \sqrt{34}$ ， $BC = 2$ ， $AC = \sqrt{26}$ ，又已知 M 、 N 分别为 AE 、 BE 的中点，连接

DM 、 CN 。求 $\triangle DEM$ 与 $\triangle CEN$ 的周长之和。

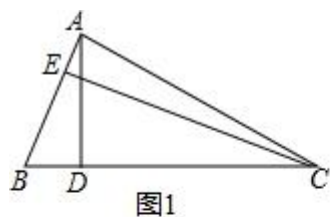


图1

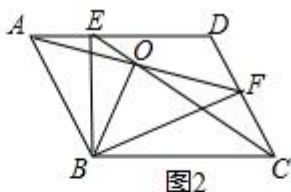


图2

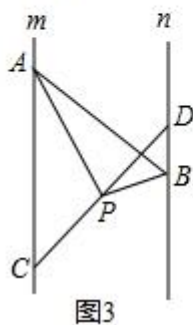


图3

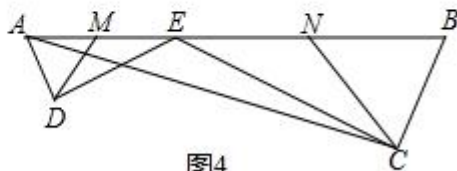


图4

【考点】：三角形综合题．

【分析】（1）先判断出 $\triangle ABF$ 和 $\triangle NCE$ 面积相等，进而利用面积相等判断出 $BG=BH$ ，最后用HL判断出两三角形全等即可得出结论；

（2）先求出 $PF=PG=2$ ，再判断出 $AE=AB$ ，最后用两三角形面积相等即可得出结论；

（3）先构造直角三角形求出AF即可得出 $DE+CE$ ，再利用直角三角形的性质求出 $DM+CN=\frac{1}{2}AB$ ，同理： $EM+EN=\frac{1}{2}AB$ ，即可得出结论．

【解答】证明：（1）如图2，

$\because$ 四边形ABCD是平行四边形，

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}, S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD},$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle BCE},$$

过点B作 $OG \perp AF$ 于G， $OH \perp CE$ 于H，

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AF \times BG, S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} CE \times BH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AF \times BG = \frac{1}{2} CE \times BH, \text{ 即: } AF \times BG = CE \times BH,$$

$$\therefore AF = CE,$$

$$\therefore BG=BH,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOG \text{ 和 Rt}\triangle BOH \text{ 中, } \begin{cases} BO=BO \\ BG=BH \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BOG \cong \text{Rt}\triangle BOH,$$

$$\therefore \angle BOG = \angle BOH,$$

$$\therefore OB \text{ 平分 } \angle AOC,$$

(2) 如图 3,

过点 P 作 $PG \perp n$ 于 G, 交 m 于 F,

$$\therefore m \parallel n,$$

$$\therefore PF \perp AC,$$

$$\therefore \angle CFP = \angle BGP = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 P 是 CD 中点,

$$\text{在 } \triangle CPF \text{ 和 } \triangle DPG \text{ 中, } \begin{cases} \angle CFP = \angle DGP \\ CP = DP \\ \angle CPF = \angle DPG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CPF \cong \triangle DPG,$$

$$\therefore PF = PG = \frac{1}{2} FG = 2,$$

延长 BP 交 AC 于 E,

$$\therefore m \parallel n,$$

$$\therefore \angle ECP = \angle BDP,$$

$$\therefore CP = DP,$$

$$\text{在} \triangle CPE \text{ 和 } \triangle DPB \text{ 中, } \begin{cases} \angle ECP = \angle BDP \\ CP = DP \\ \angle CPE = \angle DPB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CPE \cong \triangle DPB,$$

$$\therefore PE = PB,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = AB,$$

$$\therefore S_{\triangle APE} = S_{\triangle APB},$$

$$\therefore S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} AE \times PF = AE = AB, S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} AP \times PB,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} AP \times PB,$$

$$\text{即: } PA \cdot PB = 2AB;$$

(3) 如图4, 延长AD, BC交于点G,

$$\therefore \angle BAD = \angle B,$$

$$\therefore AG = BG, \text{ 过点A作 } AF \perp BC \text{ 于F,}$$

$$\text{设 } CF = x (x > 0),$$

$$\therefore BF = BC + CF = x + 2,$$

$$\text{在 Rt} \triangle ABF \text{ 中, } AB = \sqrt{34},$$

$$\text{根据勾股定理得, } AF^2 = AB^2 - BF^2 = 34 - (x+2)^2,$$

$$\text{在 Rt} \triangle ACF \text{ 中, } AC = \sqrt{26},$$

$$\text{根据勾股定理得, } AF^2 = AC^2 - CF^2 = 26 - x^2,$$

$$\therefore 34 - (x+2)^2 = 26 - x^2,$$

$$\therefore x = -1 \text{ (舍)} \text{ 或 } x = 1,$$

$$\therefore AF = \sqrt{26 - x^2} = 5,$$

连接 EG,

$$\therefore S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} BG \times AF = S_{\triangle AEG} + S_{\triangle BEG} = \frac{1}{2} AG \times DE + \frac{1}{2} BG \times CE = \frac{1}{2} BG (DE + CE),$$

$$\therefore DE + CE = AF = 5,$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中, 点 M 是 AE 的中点,

$$\therefore AE = 2DM = 2EM,$$

$$\text{同理: } BE = 2CN = 2EN,$$

$$\therefore AB = AE + BE,$$

$$\therefore 2DM + 2CN = AB,$$

$$\therefore DM + CN = \frac{1}{2} AB,$$

$$\text{同理: } EM + EN = \frac{1}{2} AB$$

$$\therefore \triangle DEM \text{ 与 } \triangle CEN \text{ 的周长之和} = DE + DM + EM + CE + CN + EN = (DE + CE)$$

$$+ [(DM + CN) + (EM + EN)]$$

$$= (DE + CE) + AB = 5 + \sqrt{34}.$$

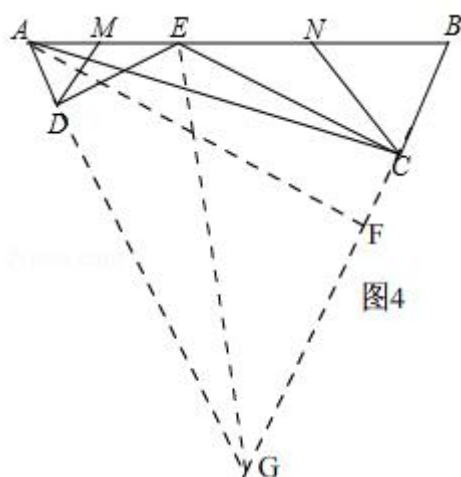


图4

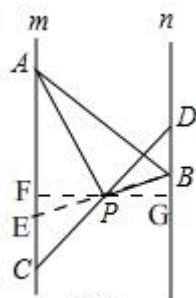


图3

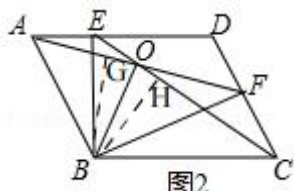


图2

【点评】此题是三角形综合题，主要考查了全等三角形判定和性质，勾股定理，平行四边形的性质，解本题的关键是构造出图形，利用两三角形面积相等得出相等线段是解本题的难点。