太原市 2018 高三年级模拟试题（二）

数学（理）试卷分析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

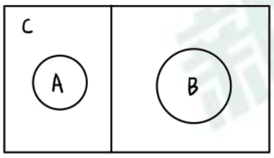
1.设 U 为全集，集合 A，B，C 满足 $A\subseteq C$，$B\subseteq C_U C$ 则下列结论中不成立的是（　　）

A．$A\mathrm{I}\ B=\phi$　　B．$(C_u A)\supseteq B$　　C．$(C_U B)\mathrm{I}\ A=A$　　D．$A\mathrm{U}(C_U B)=U$

考点： 集合间的关系

答案： D

解析： 如图 $A\subseteq C_U B$，故 $A\mathrm{U}(C_U B)=C_U B$



故选 D

2.若复数 $\dfrac{a-i}{2+i}$ 的实部与虚部相等，则实数 a 的值为（　　）

A．$-\dfrac{1}{3}$　　B．-3　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．3

考点： 复数

答案： A

解析： 因为 $\dfrac{a-i}{2+i}=\dfrac{(a-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{(2a-1)-(a+2)i}{5}$，所以 $2a-1=-(a+2)$，解得 $a=-\dfrac{1}{3}$.

故选 A

3.下列命题中错误的是（　　）

A．若命题 $p:\exists x_0\in\mathrm{R}$，使得 ${x_0}^2\le 0$，则 $\neg p:\forall x\in\mathrm{R}$，都有 $x^2>0$

B．若随机变量 X：$N(2,\sigma^2)$，则 $P(X>2)=0.5$

C．设函数 $f(x)=x^2-2^x(x\in R)$，则函数 $f(x)$ 有两个不同的零点

D．"$a>b$"是"$a+c>b+c$"的充分必要条件

考点： 命题的真假判断

答案： C

解析： 令 $g(x)=x^2$，$h(x)=2^x$，在同一坐标系中绘制函数图象，有三个交点，故 $f(x)$ 有三个不同的零点.

故选 C

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别是 A，B，左、右焦点分别是 F_1，F_2，若 $|AF_1|$，$|F_1F_2|$，$|F_1B|$ 成等比数列，则椭圆的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

考点： 椭圆的离心率

答案： A

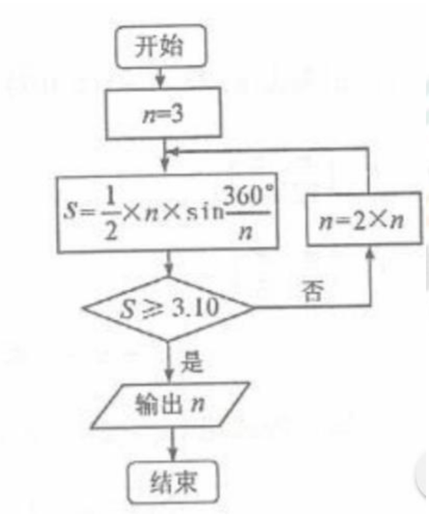
解析： 因为 $|AF_1|=a-c$，$|F_1F_2|=2c$，$|F_1B|=a+c$，$|AF_1|$，$|F_1F_2|$，$|F_1B|$ 成等比数列，

所以 $(2c)^2=(a+c)(a-c)$，$4c^2=a^2-c^2$，解得 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{5}$，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选 A

5. 公元 263 年左右，我国数学家刘徽发现当圆内接正多边形的边数无限增加时，多边形面积可无限逼近圆的面积，并创立了“割圆术”，利用“割圆术”，刘徽得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 3.14，这就是著名的“徽率”，如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图，则输出 n 的值为（　　）

（参考数据：$\sin 15^\circ\approx 0.2588$，$\sin 7.5^\circ\approx 0.1305$）



A． 6　　B． 12　　C． 24　　D． 48

考点：程序框图

答案：C

解析：当 $n=6$， $S=3\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$， 不满足 $S\geq 3.10$；

当 $n=12$， $S=6\sin 30°=3$， 不满足 $S\geq 3.10$；

当 $n=24$， $S=12\sin 15°\approx 3.1056$， 满足 $S\geq 3.10$， 退出循环， $n=24$.

故选 C

6.已知 $a=2^{1.1}$， $b=5^{0.4}$， $c=\ln\frac{5}{2}$， 则（　　）

A． $b>c>a$　　B. $a>c>b$　　C． $b>a>c$　　D． $a>b>c$

考点：指对数大小比较

答案：D

解析： $a=2^{1.1}>2^{1}=2$， $1<b=5^{0.4}=5^{\frac{2}{5}}<2^{\frac{5}{5}}=2$， $c=\ln\frac{5}{2}<\ln e=1$，故 $a>b>c$.

故选

7.已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+2|,-3\leq x<0\\ \log_a x,x>0\end{cases}$ $(a>0且a\neq 1)$，若函数 $f(x)$ 的图像上有且只有一对点关于 y 轴对称，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,3)$　　C．$(0,1)\cup(1,3)$　　D．$(0,1)\cup(3,+\infty)$

考点：函数的零点

答案：C

解析：由题意，$0<a<1$时，显然成立；$a>1$时，$f(x)=\log_a x$关于y轴的对称函数为$f(x)=\log_a(-x)$，则$\log_a 3>1$，所以$1<a<3$；综上所述，a的取值范围是$(0,1)\cup(1,3)$.

故选 C

8.某校组织高一年级 8 个班级的 8 支篮球队进行单循环比赛（每支球队与其他 7 支球队各比赛一场），计分规则是：胜一局得 2 分，负一局得 0 分，平局双方各得 1 分，下面关于这 8 支球队的得分叙述正确的是（　　）.

A．可能有两支球队得分都是 14 分　　B．各支球队最终得分总和为 56 分

C．各支球队中最高得分不少于 8 分　　D．得奇数分的球队必有奇数个

考点：排列组合&推理证明

答案：B

解析：关于 A，某支球队得 14 分，说明 7 场比赛全胜，则其他球队至少有一次负，则不可能得 14 分，故 A 错；

关于 B，8 支球队共比赛 $C_8^2=\dfrac{8\times7}{2}=28$ 场比赛，每场比赛得分和为 2，总得分为 56 分，故 B 对；

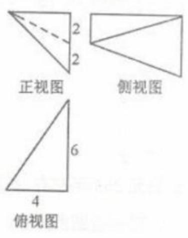
关于 C，一支球队 7 场比赛全胜的话得 14 分，故 C 对；

关于 D，设各个队伍得分为 $m_1+m_2+\cdots+m_7+m_8=56$

若这 8 个数中有 $2k+1$个奇数，则有 $8-(2k-1)=7-2k$ 个偶数，其和必为奇数，不可能等于 56，故 D 错.

故选 B

9.一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积等于（　　）.



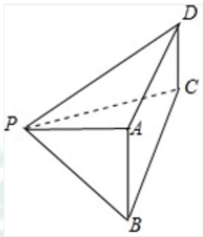
A. 72　　B. 48

C. 24　　D. 16

考点： 几何体三视图求体积

答案： C

解析： 如图所示，该几何体为四棱锥 $P-ABCD$



其中底面 $ABCD$ 为直角梯形，$CD // \frac{1}{2}AB$　$AB \perp AD$

$PA \perp$ 底面 $ABCD$

所以该几何体的体积为 $V=\frac{1}{3}\times PA\times S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times 4\times\left(\frac{2+4}{2}\right)\times 6=24$

故选 C

10. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2}\right)$，其图象与直线 $y=-2$ 相邻两个交点的距离为 π，若 $f\left(x\right)>0$ 对 $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，则 φ 的取值范围是（　　）.

A. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

考点： 三角函数的图象与性质

答案： D

解析： 函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象与直线 $y=-2$ 相邻两个交点的距离为 π

故 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$，所以函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$

又因为 $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$，$f\left(x\right)>0$ 恒成立，

故有 $-\frac{\pi}{6}+\varphi\ge 2k\pi$，且 $\frac{2\pi}{3}+\varphi\le 2k\pi+\pi$，求得 $\varphi\ge 2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 且 $\varphi\le 2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$

又因为$|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$，则$\varphi$的取值范围为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，故选 D

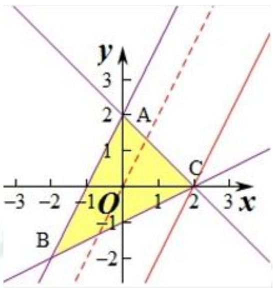
11. 已知不等式组$\begin{cases}x+y-2\le 0\\ x-2y-2\le 0\\ 2x-y+2\ge 0\end{cases}$，表示的平面区域为$D$，若存在点$P(x_0,y_0)\in D$，使得$y_0=2x_0+\frac{mx_0}{|x_0|}$，则实数$m$的取值范围是（　　）.

A. $(2,4]$　　B. $[-4,2)$　　C. $(-4,2)$　　D. $[2,4]$

考点： 线性规划

答案： B

解析： 做出不等式对应的平面区域如图



若 $x_0>0$，则 $y_0=2x_0+m$

根据图象可知，经过$C(2,0)$时，直线截距最小，此时m最小，

得到$m=-4$；又因为$x_0>0$，所以$m<2$，此时$-4\le m<2$；

若 $x_0<0$，则 $y_0=2x_0-m$

根据图象可知，经过$(-1,0)$时，直线截距最大，此时m最小，

得到$m=-2$；又因为$x_0<0$，所以$m<1$，此时$-2\le m<1$；

综上所述：实数m的取值范围为$[-4,2)$

故选 B

12. 若对任意的$x\in R$，都有$2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)-k\left(x^2+2x+3\right)<xge^x$成立，则实数$k$的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{e}+1\right)$　　B. $\left(-1,\frac{1}{e}+3\right)$　　C. $\left(2+\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(1+\frac{1}{2e},+\infty\right)$

考点： 利用导数求函数最值的恒成立问题

答案： D

解析： 对 $\forall x \in R$， $2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)-k\left(x^2+2x+3\right)<x g e^x$ 恒成立

不妨取 $x=0$ 代入得 $2\sin\frac{2\pi}{3}-3k=\sqrt{3}-3k<0$，即为 $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$

对 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)-k\left(x^2+2x+3\right)<x g e^x$ 变形得 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)<k\left(x^2+2x+3\right)+x g e^x$

设 $g\left(x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[-2,2\right]$，再设 $f\left(x\right)=x g e^x+k\left(x^2+2x+3\right)$

$f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(e^x+2k\right)$ 因为 $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $e^x+2k>0$

因此 $x\in\left(-\infty,-1\right)$， $f'\left(x\right)<0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$ 上单调递减；

$x\in\left(-1,+\infty\right)$， $f'\left(x\right)>0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上单调递增.

则 $f\left(x\right)\geq f\left(-1\right)=2k-\frac{1}{e}$

要满足 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)<k\left(x^2+2x+3\right)+x g e^x$ 恒成立，即为 $2k-\frac{1}{e}>2$，化简得 $k>1+\frac{1}{2e}$

故选 D

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\left(x^2+2x+y\right)^5$ 的展开式中含有 x^5y^2 的项的系数是______

考点： 二项式的展开

答案： 60

解析：

二项式 $\left(x^2+2x+y\right)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\left(x^2+2x\right)^{5-r}y^r$ ，当 $r=2$ 时，对于

$\left(x^2+2x\right)^3$，它的通项公式为$T_{r'+1}=C_3^r\left(x^2\right)^{3-r}\left(2x\right)^r$，含有$x^5y^2$的项的系数$C_5^2\cdot C_3^1\cdot 2=60$

14.设点P为双曲线$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$上一点，$F_1,F_2$分别是双曲线的左、右焦点，若$\left|PF_1\right|=2\left|PF_2\right|$，则$\cos\angle PF_2F_1=$______

考点： 双曲线的基本性质

答案： $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解析：

由双曲线可知$\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=\left|PF_2\right|=2a=2\sqrt{2}$，则$\left|PF_1\right|=4\sqrt{2}$，$\left|F_1F_2\right|=2c=2\sqrt{a^2+b^2}=4$求

$$\cos\angle PF_2F_1=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2+4^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot\left(2\sqrt{2}\right)\cdot 4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

15.已知球O是正三棱锥$A-BCD$的外接球，$BC=3,AB=2\sqrt{3}$，点E在线段BD上，且$BD=3BE$，过点E作球O的截面，则所得截面中面积最小的截面圆的面积是______

考点： 空间几何体

答案： 2π

解析：

令$\triangle BCD$的中心为O_1，球O的半径为R，连接O_1D,OD,O_1E,OE

可求得$O_1D=3\sin 60^\circ\times\dfrac{2}{3}=\sqrt{3}$

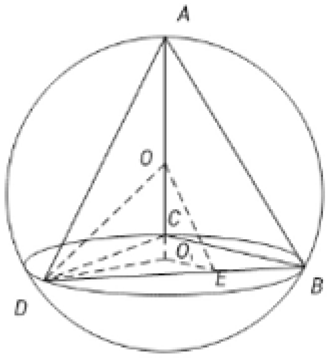
在$Rt\triangle OO_1D$中，由勾股定理得$R^2=3+\left(3-R\right)^2$，解得$R=2$

由$BD=3BE$，知$O_1E\parallel BC$，$DE=\dfrac{2}{3}DB=2$

所以$O_1E=1,OE=\sqrt{2}$

当截面与OE垂直时，截面的面积最小，此时截面圆的半径$r=\sqrt{R^2-OE^2}=\sqrt{2}$，此

时截面面积为 2π



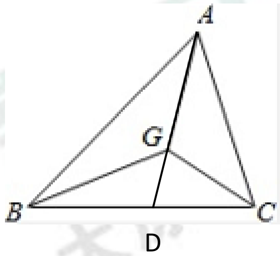
16.△ABC 中，$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$，且 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0$，若 $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B}=\dfrac{m}{\tan C}$，则实数 m 的值是______

考点： 三角函数与向量的综合应用

答案： $\dfrac{1}{2}$

解析： $m=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B}\cdot\tan C=\dfrac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{\dfrac{\sin A}{\cos A}\dfrac{\sin B}{\cos B}}\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\sin A\sin B}\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C}$

$=\dfrac{\sin^2 C}{\sin A\sin B\cos C}=\dfrac{c^2}{ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\dfrac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}$



$\overrightarrow{GA}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

同理，$\overrightarrow{GB}=-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$，因 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0$

则 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=-c^2-ac\cos B-bc\cos A+ab\cos C=0$

即 $-c^2-ac\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ab\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$ 整理得 $a^2+b^2=5c^2$

代入 $m=\dfrac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}=\dfrac{1}{2}$

三、解答题：共70分，解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤. 第17～21为必考题，每个试题考生都必须作

答. 第22、23为选考题，学生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(n-1)2^{n+1}+2$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，且 $\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+2}=\frac{1}{b_n}\left(n\in N^*\right)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 T_n.

考点： 数列的通项公式

解析：

（Ⅰ）

当 $n=1$， $a_1=2$,

当 $n\geq 2$ 时， $S_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n=(n-1)2^{n+1}+2$,①

$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)2^n+2$,②

①−②, 得 $na_n=(n-1)2^{n+1}-(n-2)2^n=n\cdot 2^n$,

则 $a_n=2^n\,(n\geq 2)$,

当 $n=1$ 时， $a_1=2$, 上式也成立，

所以 $a_n=2^n, n\in N^*$

（Ⅱ）因为 $a_n=2^n, n\in N^*$

又由题意 $\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+2}=\frac{1}{b_n}\left(n\in N^*\right)$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+2}} \\
&= \frac{1}{\log_2 2^n \cdot \log_2 2^{n+2}} \\
&= \frac{1}{n(n+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}
$$

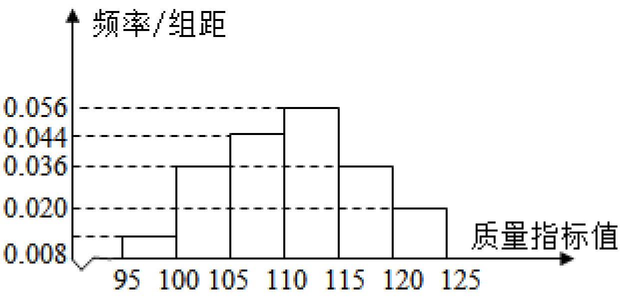
18.（本小题满分 12 分）

按照国家质量标准：某种工业产品的质量指标值落在 $[100,120)$ 内，则为合格品，否则为不合格品.某企业有甲、乙两套设备生产这种产品，为了检测这两套设备的生产质量情况，随机从两套设备生产的大量产品中各抽取了 50 件产品作为样本，对规定的质量指标值进行检测.表 1 是甲套设备的样本频数分布表，图 1 是乙套设备的样本频率分布直方图.

表 1：甲套设备的样本频数分布表

质量指标值	$[95,100)$	$[100,105)$	$[105,110)$	$[110,115)$	$[115,120)$	$[120,125]$
频数	1	4	19	20	5	1

图 1：乙套设备的样本频率分布直方图



（Ⅰ）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有90%的把握认为这种产品的质量指标值与甲、乙两套设备的选择有关；

	甲套设备	乙套设备	合计
合格品			
不合格品			
合计			

（Ⅱ）根据表 1 和图 1，对甲、乙两套设备的优劣进行比较；

（Ⅲ）将频率视为概率，若从甲套设备生产的大量产品中，随机抽取 3 件产品，记抽到的不合格品的个数为 X，求 X 的期望 $E(X)$.

附：

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

考点：概率问题

解析：

（Ⅰ）由题意，

	甲套设备	乙套设备	合计
合格品	48	43	91
不合格品	2	7	9
合计	50	50	100

将列联表中的数据代入公式计算得

$K^2=\dfrac{100\times(48\times7-43\times2)^2}{91\times9\times50\times50}\approx3.053>2.706$，故有 90% 的把握认为这种产品的质量指标值与甲、乙两套设备的选择有关.

（Ⅱ）根据表 1，甲合格率 $P_1=\dfrac{48}{50}=0.96$；

根据图 1 乙合格率 $P_2=\dfrac{43}{50}=0.86$

$P_1>P_2$，

而且，甲套设备生产的产品质量指标主要集中在 $[105,115)$ 之间，乙套设备生产的产品质量指标值与甲套设备相比较为分散，因此，可以认为甲套设备生产的合格率更高，且质量指标值更为稳定，从而甲套设备优于乙套设备.

（Ⅲ）甲的合格率为 $P_1=\dfrac{24}{25}$

$$P_{(X=0)}=C_3^0\left(\frac{1}{25}\right)^3=\frac{1}{15625}$$

$$P_{(X=1)}=C_3^1\frac{24}{25}\times\left(\frac{1}{25}\right)^2=\frac{72}{15625}$$

$$P_{(X=2)}=C_3^2\left(\frac{24}{25}\right)^2\times\frac{1}{25}=\frac{1728}{15625}$$

$$P_{(X=3)}=C_3^3\left(\frac{24}{25}\right)^3=\frac{13824}{15625}$$

分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{15625}$	$\frac{72}{15625}$	$\frac{1728}{15625}$	$\frac{13824}{15625}$

$$\therefore E(X)=\frac{3}{25}$$

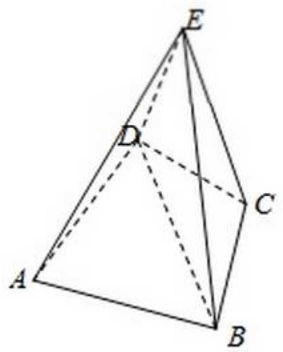
19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是圆内接四边形，

$CB=CD=CE=1,\ AB=AD=AE=\sqrt{3},\ EC\perp BD$.

（Ⅰ）求证：平面 $BED\perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅱ）若点 P 在侧面 ABE 内运动，且 DP // 平面 BEC，求直线 DP 与平面 ABE 所成角的正弦值的最大值.



考点：立体几何

解析：

（Ⅰ）证明：连接 AC,BD，交于点 O，连接 EO，

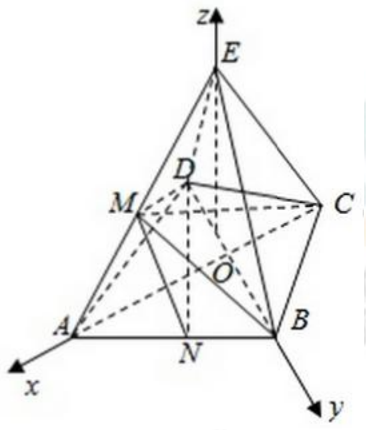
$\because AD=AB,CD=CB$，$\therefore AC\perp BD$

又 $\because EC\perp BD$，$EC\cap AC=C$，故 $DB\perp$ 面 AEC，从而 $BD\perp OE$，

又 $\because$ 底面 $ABCD$ 是圆内接四边形，$\therefore AC$ 是直径，$\therefore \angle ADC=\angle ABC=90^0$，

由 $AD=\sqrt{3},\ CD=1$ 解得 $AO=\frac{3}{2}$，则 $\frac{CO}{EO}=\frac{CE}{AC}$，故 $EO\perp AC$；

此时 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，由 $EO\subset$ 面 BED 可知平面 $BED\perp$ 平面 $ABCD$.



（II）取 AE 的中点 M， AB 的中点 N，连接 MN, ND，

则 $MN // BE$，且 $MN \not\subset$ 平面 EBC， $\therefore MN //$ 平面 EBC；

而 $DN \perp AB, BC \perp AB, \therefore DN // BC$，且 $DN \not\subset$ 平面 EBC $,\therefore DN //$ 平面 EBC .

综上所述，平面 $DMN //$ 平面 EBC $,\therefore$ 点 P 在线段 MN 上.

如图建立空间直角坐标系，则 $A\left(\frac{3}{2},0,0\right)$， $B\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right), E\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right), \overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\-\sqrt{3}x+z=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$,

设 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{MN}$，可得 $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MP}=\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda,\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\right)$

设直线 DP 与平面 ABE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{12}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{\lambda^2+\lambda+4}}$.

$\because 0\le\lambda\le 1, \therefore$ 当 $\lambda=0$ 时，$\sin\theta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

20.（本小题满分 12 分）

已知平面曲线 C 上任意一点到点 $F(0,1)$ 和直线 $y=-1$ 的距离相等，过直线 $y=-1$ 上一点 P 作曲线 C 的两条切线，切点分别为 A,B.

（I）求证：直线 AB 过定点 F

（II）若直线 PF 交曲线 C 于 D,E 两点，$\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{DP}=\mu\overrightarrow{PE}$，求 $\lambda+\mu$ 的值.

考点：圆锥曲线

解析：

（I）由抛物线的定义可知焦点在 y 轴上，设 $x^2=2py$，由 $\frac{p}{2}=1$ 知 $p=2$，所以 $C:x^2=4y$.

设 $P(x_0,-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则过 P 点的直线为 $y+1=k(x-x_0)$，联立方程组：

$\begin{cases}y+1=k(x-x_0)\\x^2=4y\end{cases}$ 得 $x^2-4kx+4kx_0+4=0$，由过 P 点的直线与 C 相切可知：

$\Delta=16k^2-16kx_0-16=0$.

由 $C:x^2=4y$ 可知 $y'=\frac{1}{2}x$，设切线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1=\frac{1}{2}x_1$，$k_2=\frac{1}{2}x_2$，

$\therefore\begin{cases}k_1+k_2=\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0\\k_1\cdot k_2=\dfrac{x_1\cdot x_2}{4}=-1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2=2x_0\\x_1\cdot x_2=-4\end{cases}$，

此时直线 $AB:y-\frac{x_1^2}{4}=\dfrac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}(x-x_1)$，化简整理可得：$2(y-1)=x_0x$，显然过定点 $(0,1)$.

（II）设 $D(x_3,y_3)$，$E(x_4,y_4)$，由 $\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{DP}=\mu\overrightarrow{PE}$ 得

$\begin{cases}(-x_3,1-y_3)=\lambda(x_4,y_4-1)\\(x_0-x_3,-1-y_3)=\mu(x_4-x_0,y_4+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{x_3}{x_4}\\\mu=\dfrac{x_0-x_3}{x_4-x_0}\end{cases}$

$\therefore\lambda+\mu=-\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_0-x_3}{x_4-x_0}=\frac{x_0(x_3+x_4)-2x_3x_4}{x_4(x_4-x_0)}$，

由题可知直线 PF 的斜率存在，故 PF 的方程为 $y-1=\frac{2x}{-x_0}$，即 $y=-\frac{2x}{x_0}+1$

代入 $x^2=4y$ 中得 $x^2+\frac{8}{x_0}x-4=0$，$\therefore x_3+x_4=-\frac{8}{x_0}, x_3\cdot x_4=-4$，

$\therefore \lambda+\mu=\frac{-x_0\cdot\frac{8}{x_0}-2\cdot(-4)}{x_4(x_4-x_0)}=0$，故 $\lambda+\mu$ 为定值，等于 0 .

21.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=\ln(ax+b)+x^2(a\neq 0)$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程 $y=x$. 求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若 $f(x)\leq x^2+x$ 恒成立，求 ab 的最大值.

考点： 导数的极值，恒成立问题

答案：

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{3}{2}-\sqrt{2}$,

函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

（Ⅱ）ab 最大值为 $\frac{e}{2}$.

解析：（Ⅰ）$\because f(x)=\ln(ax+b)+x^2(a\neq 0)$,

$\therefore f'(x)=\frac{a}{ax+b}+2x$,

$\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程 $y=x$,

$\therefore f'(1)=\frac{a}{a+b}+2=1,\ f(1)=\ln(a+b)+1=1$

解得 $a=-1,b=2;$

此时 $f(x)=\ln(-x+2)+x^2$，定义域为 $x<2$,

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x-2}+2x=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-2}=\dfrac{-2x^2+4x-1}{2-x}$

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $x\in(-\infty,1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$,，此时 $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，此时 $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},2)$，此时 $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减；

函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\ln(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})+\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$，

函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\ln(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})+\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$.

（II）设 $g(x)=f(x)-(x^2+x)$, 则 $g(x)=\ln(ax+b)-x$，依题意 $g(x)\le 0$ 恒成立，

①$a<0$ 时，$g(x)$ 定义域 $(-\infty,-\dfrac{a}{b})$，取 x_0 使得 $\ln(ax_0+b)=-\dfrac{a}{b}+1$，

得 $x_0=\dfrac{e^{-\frac{b}{a}}-b}{a}<-\dfrac{b}{a}$，

则 $g(x_0)=\ln(ax_0+b)-x_0>\ln(ax_0+b)-(-\dfrac{b}{a})=(-\dfrac{b}{a}+1)+\dfrac{b}{a}=1>0$

与 $g(x)\le 0$ 矛盾，$\therefore a<0$ 不符合题意，

②$a>0$ 时，$g'(x)=\dfrac{a}{ax+b}-1=\dfrac{-a(x-\dfrac{a-b}{a})}{ax+b}(ax+b>0)$，

当 $-\dfrac{b}{a}<x<\dfrac{a-b}{a}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>\dfrac{a-b}{a}$ 时，$g'(x)<0$

$\therefore g(x)$ 在其定义域 $(-\dfrac{b}{a},+\infty)$ 上有最大值，最大值为 $g(\dfrac{a-b}{a})$

由 $g(x)\le 0$，得 $g(\dfrac{a-b}{a})=\ln a-\dfrac{a-b}{a}\le 0$，

$\therefore b \le a - a\ln a,\ \therefore ab \le a^2 - a^2\ln a$

设 $h(a) = a^2 - a^2\ln a$，则 $h'(a) = 2a - (2a\ln a + a) = a(1 - 2\ln a)$,

$\therefore 0 < a < \sqrt{e}$ 时，$h'(a) > 0$; $a > \sqrt{e}$ 时，$h'(a) < 0$;

$\therefore$ $h(a)$ 在区间 $(0,\sqrt{e})$ 上为增函数，在区间 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上为减函数，

$\therefore h(a)$ 的最大值为 $h(\sqrt{e}) = e - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}$，

当 $a = \sqrt{e}, b = \frac{\sqrt{e}}{2}$ 时，ab 取最大值为 $\frac{e}{2}$，

综合①②得，ab 最大值为 $\frac{e}{2}$.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一道作答. 如果多做，则按所做的第一道题积分. 作答时请用 $2B$ 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22.（本小题 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

已知点 P 是曲线 $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 上的动点，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，以极点 O 为中心，将点 P 逆时针旋转 90° 得到点 Q，设点 Q 的轨迹方程为曲线 C_2.

（Ⅰ）求曲线 C_1, C_2 的极坐标方程；

（Ⅱ）射线 $\theta = \frac{\pi}{3}(\rho > 0)$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于 A, B 两点，定点 $M(2,0)$，求 ΔMAB 的面积.

考 点： 极 坐 标 与 参 数 方 程

答 案：

（Ⅰ）曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\theta$.（Ⅱ）$S = 3 - \sqrt{3}$

解 析：

（Ⅰ）曲线 $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 上，根据直角坐标和极坐标转化公式：$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

可得 $\rho = 4\cos\theta$.

设$Q(\rho,\theta)$，则$P(\rho,\theta-\frac{\pi}{2})$，则有$\rho=4\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=4\sin\theta$

所以，曲线C_2的极坐标方程为$\rho=4\sin\theta$.

（Ⅱ）M到射线$\theta=\frac{\pi}{3}$的距离为$d=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

$|AB|=\rho_B-\rho_A=4(\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3})=2(\sqrt{3}-1)$

则$S=\frac{1}{2}|AB|\times d=3-\sqrt{3}$

23.（本小题10分）选修4-5：不等式选讲

已知实数$a^2+4b^2=4$.

(I) 求证：$a\sqrt{1+b^2}\le 2$

(II)若对任意$a,b\in R$，$|x+1|-|x-3|\le ab$恒成立，求实数x的取值范围.

考点： 不等式选讲

答案：（Ⅰ）证明.（Ⅱ）$x\le\frac{1}{2}$

解析：

（Ⅰ）根据$a^2+4b^2=4$，可设$a=2\cos\theta,b=\sin\theta(\theta\in R)$

则$a\sqrt{1+b^2}=2\cos\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}=2\sqrt{\cos^2\theta(1+\sin^2\theta)}=2\sqrt{\cos^2\theta(2-\cos^2\theta)}$

令$t=\cos^2\theta$，则$t\in[0,1]$，$a\sqrt{1+b^2}=2\sqrt{t(2-t)}$

在$t\in[0,1]$上，$a\sqrt{1+b^2}=2\sqrt{t(2-t)}$的最大值为2.故$a\sqrt{1+b^2}\le 2$

（Ⅱ）设$f(x)=|x+1|-|x-3|$则$f(x)=\begin{cases}-4 & x<-1\\ 2x-2 & -1\le x\le 3\\ 4 & x>3\end{cases}$

由(I) $ab=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$，最小取−1

由$|x+1|-|x-3|\le ab$恒成立可得$|x+1|-|x-3|\le -1$

故x的取值范围是$x\le\frac{1}{2}$