太原市 2018 年高三年级模拟试题（二）

文科数学

一. 选择题： 本题共 12 个题，每题 5 分，共 60 分，在每个题给出的四个选项中，只有一个符合要求的.

1.设集合 $A=\{x|-1\le x\le 2\},B=N$，则集合 $A\cap B$ 的子集的个数是（　　）

A. 4　　B.6　　C. 8　　D. 16

考点：集合的运算

答案：C

解析：

$$\begin{cases}A=\{x|-1\le x\le 2\}\\ B=N\end{cases}\Rightarrow A\cap B=\{0,1,2\}$$，则子集的个数：$2^3=8$

故选 C

2. $\dfrac{(2+i)(1-i)^2}{1-2i}=$（　　）

A. 2　　B.-2　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

考点：复数的运算

答案：A

解析：

$$\frac{(2+i)(1-i)^2}{1-2i}=\frac{(2+i)(-2i)}{1-2i}=\frac{2-4i}{1-2i}=2$$

故选 A

3.设等比数列 $\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 "$a_1>0$"是 "$S_3>S_2$"的（　　）

A. 充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件　　D.充要条件

考点：等比数列，命题逻辑

答案：D

解析：

设等比数列公比为 q

$S_3 > S_2 \Rightarrow S_3 - S_2 = a_3 > 0$，

$a_3 = a_1 \cdot q^2$， $q^2 > 0$

所以， $a_1 > 0 \Leftrightarrow a_3 > 0$

故选 D

4.下列函数中，既是奇函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数是（ ）

A． $y = e^x + e^{-x}$　　　　B. $y = \ln(|x|+1)$

C． $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$　　　　D． $y = x - \dfrac{1}{x}$

考点： 函数的性质

答案： D

解析：

A.函数 $y = e^x + e^{-x}$ 是偶函数

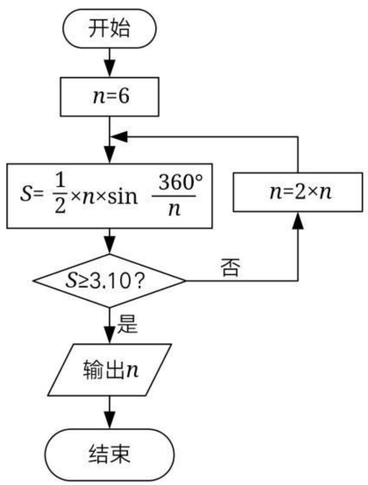
B.函数 $y = \ln(|x|+1)$ 是偶函数

C.函数 $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$ 是奇函数，但在 $(0,+\infty)$ 上不是单调递增的函数

D.函数 $y = x - \dfrac{1}{x}$ 是奇函数且 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数

故选 D

5. 公元 263 年左右,我国数学家刘徽发现当圆内接正多边　形的边数无限增加时,多边形面积可无限逼近圆的面积,并创立了　“割圆术”,利用“割圆术”,刘徽得到了圆周率精确到小数点后　两位的



近似值 3.14,这就是著名的“徽率”,如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图,则输出 n 的值为（　　）

（参考数据: $\sin 15^{o} \approx 0.2588, \sin 7.5^{o} \approx 0.1305$）

A. 12　　B.18　　C. 24　　D. 48

考点： 循环结构

答案： C

解析：

① $n=6, S \approx 2.598<3.1$

② $n=12, S=3<3.1$

③ $n=24, S=3.1056>3.1$

结束循环，输出 $n=24$

故选 C

6.某班从 3 名男生和 2 名女生中任意取 2 名学生参加活动，则抽到 2 名学生性别相同的概率为（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{2}$

考点： 古典概型

答案： B

解析：

记 3 名男生和 2 名女生分别为 A_1, A_2, A_3, B_1, B_2

构成事件的基本空间 $\Omega=\{(A_1, A_2),(A_1, A_3), \cdots,(B_1, B_2)\}=10$

设抽到 2 名学生性别相同的事件为 A，

则构成事件 A 的基本空间 $\Omega_A=\{(A_1, A_2),(A_1, A_3),(A_2, A_3),(B_1, B_2)\}=4$

$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

故选 B

7.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距为 c，原点 O 到经过两点 $(c,0),(0,b)$ 的直线的距离为 $\frac{c}{2}$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

考点： 椭圆的性质

答案： A

解析：

法①：根据等面积

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}a\cdot\frac{c}{2}\Rightarrow a=2b$$

离心率：$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故选 A

法②：

两点所在的直线方程：$bx+cy-bc=0$

原点到直线的距离：$d=\frac{|-bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{bc}{a}=\frac{c}{2}\Rightarrow a=2b$

离心率：$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故选 A

8. 已知 $a=2^{1.1}$，$b=5^{0.4}$，$c=\ln\frac{5}{2}$，则（　　）

A. $b>c>a$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

考点： 指对数大小比较

答案： D

解析： $a=2^{1.1}>2^1=2$，$1<b=5^{0.4}=5^{\frac{2}{5}}<2^{\frac{5}{5}}=2$，$c=\ln\frac{5}{2}<\ln e=1$，故 $a>b>c$.

故选 D

9．已知函数 $f\left(x\right)=a\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一条对称轴为 $x=-\dfrac{\pi}{6}$，若 $f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)=-4$，则 $\left|x_1+x_2\right|$，的最小值为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

考点：三角函数的性质

答案：C

解析：$f\left(x\right)=a\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{a^2+3}\sin(x+\varphi)$，由函数对称轴 $x=-\dfrac{\pi}{6}$，可得：，

$f(-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}$，即 $\left|-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}\right|=\sqrt{a^2+3}$，平方求解可得 $a=1$，

则 $f\left(x\right)=2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$，

又 $f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)=-4$，$x_1$，$x_2$ 为最值点

不妨 $x_1=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，$x_2=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}$，$\left|x_1+x_2\right|=4k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，

故在 $k=0$ 时取得最小值 $\left|x_1+x_2\right|=\dfrac{2\pi}{3}$.

故选 C

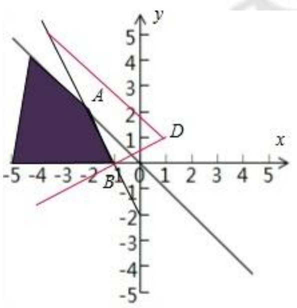
10．已知实数 x，y 满足 $\begin{cases} y\geq 0 \\ x+y\leq 0 \\ 2x+y+2\leq 0 \end{cases}$ 若 $ax-y+1-a\geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　B．$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right]$　　C．$(-\infty,-1]$　　D．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$

考点：线性规划

答案：C

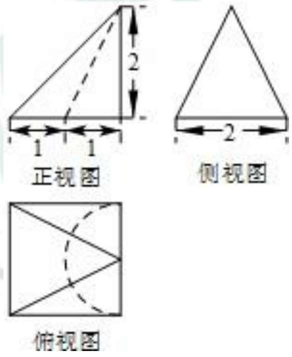
解析：



可行域如图所示，自变量 $x\le 0$，由 $ax-y+1-a\ge 0$ 可化简得 $a\le\dfrac{y-1}{x-1}$，过 $\left(1,1\right)$ 直线，当且仅当斜率小于等于 -1 时恒成立，故 $a\le -1$.

故选 C

11．某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



A. $\dfrac{7}{3}\pi$

B. $\dfrac{8-\pi}{3}$

C. $\dfrac{7-\pi}{3}$

D. $\dfrac{8}{3}\pi$

考点： 根据三视图求几何体体积

答案： B

解析：

三视图易知为切割体，四棱锥切去半个圆锥所得，故 $V=\dfrac{1}{3}\times 2\times 2\times 2-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\pi\times 1^2\times 2=\dfrac{8-\pi}{3}$，

故选 B

12．已知函数 $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx$ 有两个极值点 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$， 若 $x_1+2x_0=3x$ ，则函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(x_0\right)$（　　）

A. 恰有一个零点　　　　B. 恰有两个零点

C. 恰有三个零点　　　　D. 零点个数不确定

考点： 导数与极值

答案： B

解析：

$f'\left(x\right)=3x^2+2ax+b$， $f\left(x\right)$ 有两个极值点，故 $f'\left(x\right)=0$ 有两个根 $x_1+x_2=-\dfrac{2a}{3}$ ①，

$x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{3}$

又 $x_1+2x_0=3x_2$ 可得： $x_0=\dfrac{3x_2-x_1}{2}=x_2+\dfrac{x_2-x_1}{2}>x_2$，

取 $f\left(x_1\right)=f\left(x\right)$ 的一解为 t，

则 $x^3+ax^2+bx-f(x_1)=(x-x_1)^2(x-t)$，

得 $t=-a-2x_1$ ②

联立①②可得：$t=\dfrac{3x_2-x_1}{2}=x_0$ 故 $f(x_1)=f(t)=f(x_0)$，有且只有两个零点

故 选 B

二．填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分

13. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=\sqrt{2}|\vec{b}|$，且 $(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{b})$，则向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角的余弦值为______.

考 点： 向 量 的 数 量 积

答 案： $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解 析：

由题有：$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-3|\vec{b}|^2=0$

$$\therefore\cos\theta=\frac{3|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3-\left(\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)^2}{2\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}}=\frac{3-\sqrt{2}^2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 $M(-3,4)$ 关于一条渐近线的对称点恰为双曲线的右焦点 F_2，则该双曲线的标准方程为______.

考 点： 双 曲 线 的 标 准 方 程

答 案： $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$

解 析：

渐近线为：$y=\pm\dfrac{b}{a}x$

设 $F_2(c,o)$，由图知 $M(-3,4)$ 关于 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的对称点为 $F_2(c,o)$，

$\therefore\begin{cases}\dfrac{4}{2}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c-3}{2}\\ \dfrac{4}{-3-c}=-\dfrac{a}{b}\end{cases}$，解得$\begin{cases}c=5\\ \dfrac{b}{a}=2\end{cases}$

又$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore a^2=5,b^2=20$，$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$即为所求。

15. 已知菱形$ABCD$中，$AB=6\sqrt{3},\angle BAD=60°$，沿对角线$BD$折成二面角$A-BD-C$为$60°$的四面体，则四面体$ABCD$的外接球的表面积为______.

考点： 四面体的外接球

答案： 156π

解析：

依题有：外接球的球心位于过底面BCD的外心的垂线上，设球心O到底面BCD的距离为x，半径为r，由几何关系有：$r^2=36+x^2$

又由$OA^2=r^2=\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=x^2+36$得：$x=\sqrt{3},\therefore r^2=39,S=4\pi r^2=156\pi$

16. 数列$\{a_n\}$中，若$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1},a_n=\dfrac{b_n+2}{b_n-1},n\in N^*$，则数列$\{|b_n|\}$的前$n$项和为______.

考点： 数列的前n项和

答案： $4\left(2^n-1\right)$

解析：

由$a_n=\dfrac{b_n+2}{b_n-1}$得：$b_n=\dfrac{3}{a_n-1}+1$，$b_1=\dfrac{3}{a_1-1}+1=4$

由$a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1}$得：$\dfrac{3}{a_{n+1}-1}+1=-2\left(\dfrac{3}{a_n-1}+1\right)$，即$b_{n+1}=-2b_n$

$\therefore|b_{n+1}|=2|b_n|$，即$\{|b_n|\}$是以4为首项，2为公比的等比数列

$\therefore S_n=\dfrac{4\times\left(1-2^n\right)}{1-2}=4\left(2^n-1\right),n\in N^*$

三．解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第$17\sim21$题为必考题，每个试题考生都必须做答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

17.（本小题满分12分）

已知ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a\tan A=\sqrt{3}\left(c\cos B+b\cos C\right)$.

（Ⅰ）求角A；

（Ⅱ）若点D满足$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$，且$BD=3$，求$2b+c$的取值范围.

考点：解三角形

答案：（Ⅰ）$\because a\tan A=\sqrt{3}\left(c\cdot\cos B+b\cdot\cos C\right)$

$$\therefore \sin A\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=\sqrt{3}\left(\sin C\cdot\cos B+\sin B\cos C\right)$$

$$\therefore \sin A\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=\sqrt{3}\sin A$$

$$\therefore \tan A=\sqrt{3},\quad A=\frac{\pi}{3}$$

（Ⅱ）$\because \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}, BD=3$

$$\therefore \cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\frac{c^2+\left(2b\right)^2-9}{2\times 2b\times c}$$

$$\therefore \frac{\left(2b+c\right)^2-4bc-9}{2bc}=1$$

$$\therefore \left(2b+c\right)^2-2\cdot 2bc-9=2bc$$

$$\therefore \left(2b+c\right)^2-9=3\cdot 2bc\le 3\cdot\left(\frac{2b+c}{2}\right)^2$$

$$\therefore \left(2b+c\right)^2-9\le 3\cdot\frac{\left(2b+c\right)^2}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4}\left(2b+c\right)^2\le 9,\left(2b+c\right)^2\le 36$$

$\therefore 3<2b+c\le 6$

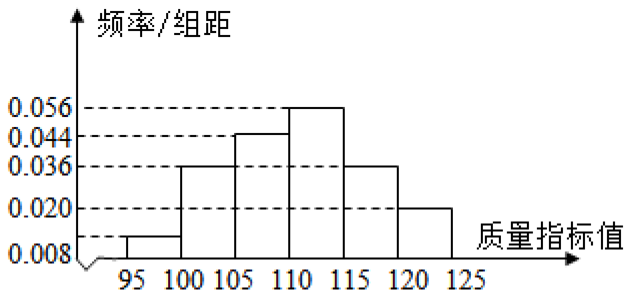
18.（本小题满分12分）

按照国家质量标准：某种工业产品的质量指标落在$[100,120)$内，则为合格品，否则为不合格品。某企业有甲、乙两套设备生产这种产品，为了检测这两套设备的生产质量情况，随机从两套设备生产的大量产品中各抽取了50件产品作为样本，对规定的质量指标值进行检测，表1是甲套设备的样本频数分布表，图1是乙套设备的样本频率分布直方图.

表1：甲套设备的样本频数分布表

质量指标值	$[95,100)$	$[100,105)$	$[105,110)$	$[110,115)$	$[115,120)$	$[120,125)$
频数	1	4	19	20	5	1

图1：乙套设备的样本频率分布直方图



（I）将频率视为概率. 若乙套设备生产了5000件产品，则其中的不合格品约有多少件；

（II）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有90%的把握认为该企业生产的这种产品的质量指标值与甲、乙两套设备的选择有关；

	甲套设备	乙套设备	合计
合格品			
不合格品			
合计			

（III）根据表1和图1，对两套设备的优劣进行比较.

附：

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.15	0.10	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2. 706	3.841	5.024	6.635

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

考点：统计与概率

答案：由表1 可知甲套设备的样本中合格品有48件，不合格品有2件；

由图1可知乙套设备的样本中合格品有43件，不合格品有7件。

（I）P（乙不合格）$=(0.008+0.020)\times5=0.04+0.1=0.14$

所以不合格品约有 $5000\times0.14=700$（件）

（II）

	甲套设备	乙套设备	合计
合格品	48	43	91
不合格品	2	7	9
合计	50	50	100

$$K^2=\frac{100\times(48\times7-43\times2)^2}{50\times50\times9\times91}\approx3.053>2.706$$

故有90%的把握认为有关；

（III）甲套设备生产合格率约为 $\frac{48}{50}$

乙套设备生产合格率约为 $\frac{43}{50}$

甲套生产的产品主要集中在 $[100,120)$ 之间

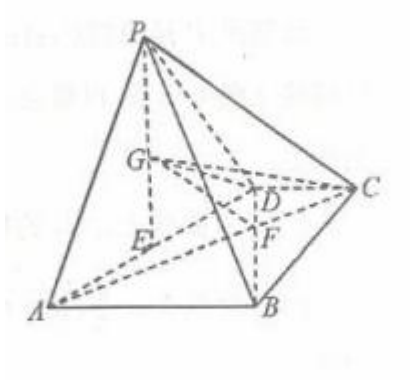
乙套生产的产品与甲套相比比较分散

因此，甲套设备生产的合格率更高，且相对稳定，从而甲套设备优于乙套设备。

19. 四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCI$, 底面 $ABCD$ 为梯形，$AB\parallel CD$，$AB=2DC=2\sqrt{3}$，$AB\cap BD=F$，$\triangle PAD$ 与 $\triangle ABD$ 均为正三角形，E 为 AD 的中点，G 为 $\triangle PAD$ 重心.

(I) 求证：GF 平面 PDC;

(II) 求三棱锥 $G-PCD$ 的体积.



考点： 立体几何线面关系和棱锥体积

解析：

（I）证明：连接 AG 并延长交 PD 于点 H，连接 HC

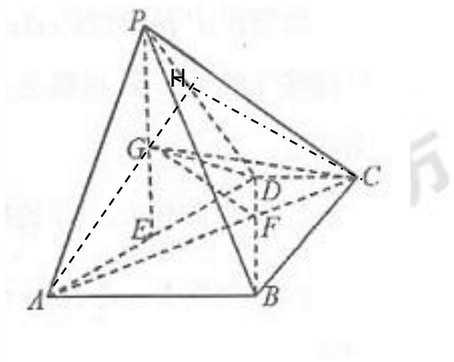
由于 $AB\parallel CD$，且 $\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，可得 $\dfrac{FC}{FA}=\dfrac{1}{2}$

又等边 $\triangle PAD$ 中，G 为重心，则 $\dfrac{GH}{GA}=\dfrac{1}{2}$

故在 $\triangle ACH$ 中 $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AG}{GH}$

则 $GF\parallel HC$

又 $HC\subset$ 面 PDC，故 $GF\parallel$ 面 PDC



（II）$V_{G-PCD}=V_{P-CDG}=V_{P-CDE}-V_{G-CDE}$

$$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{P-CDE}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times3-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times1$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

20. 已知以点 $C(0,1)$ 为圆心的动圆 C 与 y 轴负半轴交于点 A，其弦 AB 的中点 D 恰好落在 x 轴上.

(I) 求点 B 的轨迹 E 的方程；

(II) 过直线 $y=-1$ 上一点 P 作曲线 E 的两条切线，切点分别为 M，N. 求证：直线 MN 过定

点 .

考点： 立体几何线面关系和棱锥体积

解析：

（Ⅰ）设 $B(x,y)$，中点 $D(\frac{x}{2},0)$，$C(0,1)$

$\overrightarrow{CD}=(\frac{x}{2},-1)$，$\overrightarrow{DB}=(\frac{x}{2},y)$

$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}=0\Rightarrow\frac{x^2}{4}-y=0$

即 $x^2=4y(y\neq 0)$

所以点 B 的轨迹 E 的方程为 $x^2=4y(y\neq 0)$

（Ⅱ）设 $P(t,-1)$，则切线方程为 $y+1=k(x-t)$

联立直线与曲线方程 $\begin{cases}y+1=k(x-t)\\x^2=4y\end{cases}\Rightarrow x^2-4kx+4kt+4=0$

由相切可得 $\begin{aligned}&\Delta=16k^2-4(4kt+4)=0\\&\Rightarrow 16k^2-16kt-16=0\\&\Rightarrow k^2-kt-1=0\\&\Rightarrow k^2=kt+1\end{aligned}$

所以 $k_1\cdot k_2=-1$，代入 $x^2-4kx+4kt+4=0$

得：$x^2-4kx+4k^2=0$

即：$(x-2k)^2=0,x=2k$

所以切点 $M(2k_1,k_1{}^2),N(2k_2,k_2{}^2)$

$k_{MN}=\frac{k_2{}^2-k_1{}^2}{2k_2-2k_1}=\frac{k_1+k_2}{2}$

$y-k_1{}^2=\frac{k_1+k_2}{2}(x-2k_1)$

当 $x=0$ 时， $y=\dfrac{k_1+k_2}{2}(-2k_1)-k_1{}^2=\dfrac{-2k_1k_2}{2}=-k_1k_2=1$

所以过定点 $(0,1)$

21.(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=m\ln x-e^{-x}(m\neq 0)$

(I) 若函数 $f(x)$ 是单调函数，求实数 m 的取值范围；

(II)证明：对于所有的正实数 a,b，当 $a>b$ 时，都有 $e^{1-a}-e^{1-b}>1-\dfrac{a}{b}$.

考点： 函数与导数

答案：（I）当 $m>0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m\le -\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减..

（II）证明如下.

解析：（I）定义域 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{m}{x}+e^{-x}=\dfrac{me^x+x}{xe^x}(m\neq 0)$

当 $m>0$ 时， $f'(x)>0$， 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m<0$ 时

1)若 $me^x+x>0$，可得 $m>-\dfrac{x}{e^x}$.

令 $g(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，可知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)=-\dfrac{x}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 无最大值， $me^x+x>0$ 不成立；

2) 若 $me^x+x\le 0$，可得 $m\le -\dfrac{x}{e^x}$.

令 $g(x)=-\dfrac{x}{e^x}$， 则 $g(x)\ge g(1)=-\dfrac{1}{e}$.故当 $0<m\le -\dfrac{1}{e}$ 时， $f'(x)\le 0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

综上所述：

当 $m>0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$m\le -\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

（Ⅱ）由(1)可知：$m=-\frac{1}{e}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减。

当 $a>b>0$时，$f(b)>f(a)$，即 $-\frac{1}{e}\ln b-e^{-b}>-\frac{1}{e}\ln a-e^{-a}$

化简得：$e^{1-a}-e^{1-b}>\ln b-\ln a$

要证 $e^{1-a}-e^{1-b}>1-\frac{a}{b}$，只要证 $\ln b-\ln a>1-\frac{a}{b}$，即证 $\ln\frac{b}{a}>1-\frac{a}{b}$

令 $t=\frac{b}{a}(0<t<1)$，则只要证 $h(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1>0$

$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$，故在 $0<t<1$上$h(t)$单调递减，$h(t)>h(1)=0$，得证。

（二）选考题：共10分. 请考生在第22、23题中任选一道作答. 如果多做，则按所做的第一道题积分. 作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22（本小题 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

已知点P是曲线$C_1:(x-2)^2+y^2=4$上的动点，以坐标原点O为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，以极点O为中心，将点P逆时针旋转90°得到点Q，设点Q的轨迹方程为曲线C_2.

（Ⅰ）求曲线C_1,C_2的极坐标方程；

（Ⅱ）射线$\theta=\frac{\pi}{3}(\rho>0)$与曲线$C_1,C_2$分别交于$A,B$两点，定点$M(2,0)$，求$\Delta MAB$的面积.

考点： 极坐标与参数方程

答案：

（Ⅰ）曲线C_2的极坐标方程为$\rho=4\sin\theta$.（Ⅱ）$S=3-\sqrt{3}$

解析：

（Ⅰ）曲线$C_1:(x-2)^2+y^2=4$上，

根据直角坐标和极坐标转化公式：$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，可得$\rho=4\cos\theta$.

设$Q(\rho,\theta)$，则$P(\rho,\theta-\frac{\pi}{2})$，则有$\rho=4\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=4\sin\theta$

得曲线C_2的极坐标方程为$\rho=4\sin\theta$.

（Ⅱ）M 到射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 的距离为 $d=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

$|AB|=\rho_B-\rho_A=4(\sin\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{3})=2(\sqrt{3}-1)$

则 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\times d=3-\sqrt{3}$

23（本小题 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知实数 $a^2+4b^2=4$.

(Ⅰ) 求证：$a\sqrt{1+b^2}\le 2$

(Ⅱ)若对任意 $a,b\in R$，$|x+1|-|x-3|\le ab$ 恒成立，求实数 x 的取值范围.

考点： 不等式选讲

答案：（Ⅰ）证明.（Ⅱ）$x\le\dfrac{1}{2}$

解析：

（Ⅰ）根据 $a^2+4b^2=4$，可设 $a=2\cos\theta,b=\sin\theta(\theta\in R)$

则 $a\sqrt{1+b^2}=2\cos\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}=2\sqrt{\cos^2\theta(1+\sin^2\theta)}=2\sqrt{\cos^2\theta(2-\cos^2\theta)}$

令 $t=\cos^2\theta$，则 $t\in[0,1]$，$a\sqrt{1+b^2}=2\sqrt{t(2-t)}$

在 $t\in[0,1]$上，$a\sqrt{1+b^2}=2\sqrt{t(2-t)}$的最大值为 2

故 $a\sqrt{1+b^2}\le 2$

（Ⅱ）设 $f(x)=|x+1|-|x-3|$ 则 $f(x)=\begin{cases}-4 & x<-1\\ 2x-2 & -1\le x\le 3\\ 4 & x>3\end{cases}$

由（Ⅰ）$ab=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$，最小取-1

由 $|x+1|-|x-3|\le ab$ 恒成立可得 $|x+1|-|x-3|\le -1$

故 x 的取值范围是 $x\le\dfrac{1}{2}$