

绝密★启用前

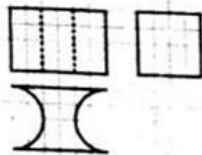
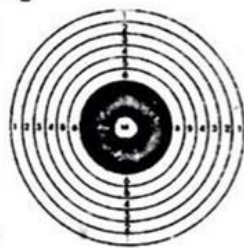
2018年普通高等学校招生全国统一考试 广东省理科数学模拟试卷(一)

注意事项:

1. 答题前,考生务必用0.5毫米黑色字迹签字笔将自己所在的县(市、区)、学校以及自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡 and 试卷的指定位置,并用2B铅笔在答题卡的“考生号”处填涂考生号.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

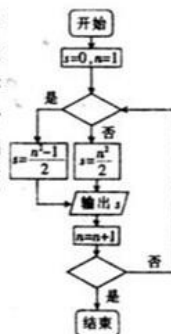
一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < 1 - x < 1\}$, $B = \{x | x^2 < 1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | -1 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x < 1\}$ C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$
2. 设复数 $z = a + 4i$ ($a \in \mathbb{R}$), 且 $(2 - i)z$ 为纯虚数, 则 $a =$
A. -1 B. 1 C. 2 D. -2
3. 右图为射击使用的靶子, 靶中最小的圆的半径为1, 靶中各圆的半径依次加1, 在靶中随机取一点, 则此点取自黑色部分(7环到9环)的概率是
A. $\frac{3}{20}$ B. $\frac{3\pi}{25}$
C. $\frac{3}{25}$ D. $\frac{\pi}{20}$
4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x}{2}\right) = x^3 - 3x$, 则函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线斜率为
A. 0 B. 9 C. 18 D. 27
5. 已知 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点, 点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 $2a$, 则双曲线 C 的离心率为
A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2
6. $\left(x + \frac{1}{x}\right)(1+2x)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为
A. 120 B. 160
C. 100 D. 80
7. 如图, 网格纸上的小正方形的边长为1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的表面积为
A. $48 + 8\pi$ B. $96 + 8\pi$
C. $96 + 16\pi$ D. $48 + 16\pi$



8. 已知曲线 $C: y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论正确的是
- A. 把 C 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度, 得到的曲线关于原点对称
- B. 把 C 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到的曲线关于 y 轴对称
- C. 把 C 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到的曲线关于原点对称
- D. 把 C 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到的曲线关于 y 轴对称

9. 大衍数列, 来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论. 主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理. 数列中的每一项, 都代表太极衍生过程中, 曾经经历过的两仪数量总和, 是中华传统文化中隐藏着的世界数学史上第一道数列题. 其规律是: 偶数项是序号平方再除以 2, 奇数项是序号平方减 1 再除以 2, 其前 10 项依次是 0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, ... 如图所示的程序框图是为了得到大衍数列的前 100 项而设计的, 那么在两个“ \diamond ”中, 可以先后填入



- A. n 是偶数, $n \geq 100$
- B. n 是奇数, $n \geq 100$
- C. n 是偶数, $n > 100$
- D. n 是奇数, $n > 100$
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $A = \frac{\pi}{3}$, 且 $2b \sin B + 2c \sin C = bc + \sqrt{3}a$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为
- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
11. 已知抛物线 $C: y^2 = x$, M 为 x 轴负半轴上的动点, MA, MB 为抛物线的切线, A, B 分别为切点, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值为
- A. $-\frac{1}{16}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$
12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |2^{x+1} - 2|, & x \leq 2 \\ x^2 - 11x + 30, & x > 2 \end{cases}$, 若互不相等的实数 a, b, c, d 满足 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$, 则 $2^a + 2^b + 2^c + 2^d$ 的取值范围是
- A. $(64\sqrt{2} + 2, 146)$ B. $(98, 146)$ C. $(64\sqrt{2} + 2, 266)$ D. $(98, 266)$

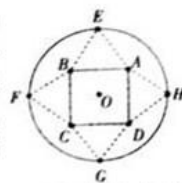
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知单位向量 e_1, e_2 的夹角为 30° , 则 $|e_1 - \sqrt{3}e_2| = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \leq 6, \\ 4x + 5y \leq 6, \\ 5x + 4y \geq 3, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. 已知 $\sin 10^\circ + m \cos 10^\circ = 2 \cos 140^\circ$, 则 $m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 如图, 圆形纸片的圆心为 O , 半径为 6 cm , 该纸片上的正方形 $ABCD$ 的中心为 O . E, F, G, H 为圆 O 上的点, $\triangle ABE, \triangle BCF, \triangle CDG, \triangle ADH$ 分别是以 AB, BC, CD, DA 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后, 分别以 AB, BC, CD, DA 为折痕折起 $\triangle ABE, \triangle BCF, \triangle CDG, \triangle ADH$, 使得 E, F, G, H 重合, 得到一个四棱锥. 当该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍时, 该四棱锥的外接球的体积为 $\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每道试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 5$, 且 a_1, a_6, a_{11} 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n \cdot 3^{n-1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分)

“微信运动”是一个类似计步数据库的公众帐号. 用户只需以运动手环或手机协处理器的运动数据为介, 然后关注该公众号, 就能看见自己与好友每日行走的步数, 并在同一排行榜上得以体现. 现随机选取朋友圈中的 50 人, 记录了他们某一天的走路步数, 并将数据整理如下:

步数/步	0~3000	3001~6000	6001~8000	8001~10 000	10 000 以上
男性人数/人	1	2	7	15	5
女性人数/人	0	3	7	9	1

规定: 人一天行走的步数超过 8000 步时被系统评定为“积极性”, 否则为“懈怠性”.

(1) 以这 50 人这一天行走的步数的频率代替 1 人一天行走的步数发生的概率, 记 X 表示随机抽取 3 人中被系统评为“积极性”的人数, 求 $P(X \leq 2)$ 和 X 的数学期望.

(2) 为调查评定系统的合理性, 拟从这 50 人中先抽取 10 人 (男性 6 人, 女性 4 人).

其中男性中被系统评定为“积极性”的有 4 人, “懈怠性”的有 2 人, 从中任意选取 3 人, 记选到“积极性”的人数为 x ;

其中女性中被系统评定为“积极性”和“懈怠性”的各有 2 人, 从中任意选取 2 人, 记选到“积极性”的人数为 y ;

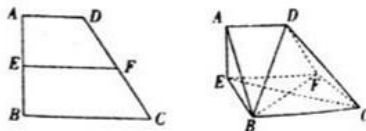
求 $x > y$ 的概率.

19. (12 分)

如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB \perp BC$, 且 $BC = 2AD = 4$, E, F 分别为线段 AB, DC 的中点, 沿 EF 把 $AEFD$ 折起, 使 $AE \perp CF$, 得到如下的立体图形.

(1) 证明: 平面 $AEFD \perp$ 平面 $EBCF$;

(2) 若 $BD \perp EC$, 求二面角 $F-BD-C$ 的余弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 C 过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点(点 P, Q 均在第一象限), l 与 x 轴, y 轴分别交于 M, N 两点, 且满足 $\frac{S_{\triangle PMO}^2 + S_{\triangle QMO}^2}{S_{\triangle PMO} \cdot S_{\triangle QMO}} = \frac{S_{\triangle PMO} + S_{\triangle QMO}}{S_{\triangle PMO} \cdot S_{\triangle QMO}}$ (其中 O 为坐标原点). 证明: 直线 l 的斜率为定值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(\ln x - x + 1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $-e$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 圆 $C_1: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, $C_2: \theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbf{R})$.

(1) 求 C_1 的极坐标方程和 C_2 的平面直角坐标系方程;

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho \in \mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_1 的交点为 O, M , C_3 与 C_1 的交点为 O, N , 求 $\triangle OMN$ 的面积.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = 3|x-a| + |3x+1|$, $g(x) = |4x-1| - |x+2|$.

(1) 求不等式 $g(x) < 6$ 的解集;

(2) 若存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 互为相反数, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生全国统一考试 广东省理科数学模拟试卷(一) 参考答案及评分标准

评分标准:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题, 当考生的解法在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.
3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数, 选择题不给中间分.

1. B 由 $-1 < 1-x < 1$, 可得 $0 < x < 2$, 即 $A = \{x | 0 < x < 2\}$. 由 $x^2 < 1$, 可得 $-1 < x < 1$, 即 $B = \{x | -1 < x < 1\}$. 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$.
2. D 因为 $(2-i)(a+4i) = 2a - ai + 8i + 4 = (2a+4) + (8-a)i$ 为纯虚数, 所以 $2a+4=0$, 解得 $a=-2$.
3. A 此点取自黑色部分的概率是 $\frac{4^2 \pi - 1^2 \pi}{10^2 \pi} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.
4. C 令 $t = \frac{x}{2}$, 则 $x=2t$, 所以 $f(t) = 8t^2 - 6t$, 即 $f(x) = 8x^2 - 6x$, 则 $f'(x) = 24x - 6$, $f'(1) = 18$.
5. C 由 C 可知一条渐近线方程为 $bx - ay = 0$, 设 $F(c, 0)$, 则点 F 到 C 的一条渐近线的距离 $d = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b = 2a$, 则双曲线 C 的离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{5}$.
6. A $(x + \frac{1}{x})(1 + 2x)^5 = x(1 + 2x)^5 + \frac{1}{x}(1 + 2x)^5$, 因为 $x(1 + 2x)^5$ 的展开式中含 x^3 的项为 $x \cdot C_5^2 (2x)^2 = 40x^3$, $\frac{1}{x}(1 + 2x)^5$ 的展开式中含 x^3 的项为 $\frac{1}{x} \cdot C_5^4 (2x)^4 = 80x^3$, 所以 x^3 的系数为 $40 + 80 = 120$.
7. B 由题可知该几何体为一个长方体截去了两个半圆柱而形成的, 则该几何体的表面积为 $4 \times 6 \times 2 + 2(4 \times 6 - 4\pi) + 2 \times 2\pi \times 4 = 96 + 8\pi$.
8. D 对于选项 D, 把 C 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin[2(x - \frac{\pi}{12}) - \frac{\pi}{3}] = \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x$, 该函数为偶函数, 其图象关于 y 轴对称.
9. D $n=1, s=0; n=2, s=2; n=3, s=4; \dots; n=99, s = \frac{99^2 - 1}{2}; n=100, s = \frac{100^2}{2}; n=101 > 100$, 结束. 所以选 D.
10. C 由 $A = \frac{\pi}{3}, 2b \sin B + 2c \sin C = bc + \sqrt{3}a$, 可知 $b \sin B + c \sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} b \cos A + a \sin A$, 得 $b^2 + c^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} abc + a^2$,

所以 $2bc \cos A = \frac{\sqrt{3}}{3} abc$, 解得 $a = 2\sqrt{3} \cos A = \sqrt{3}$. 又 $b^2 + c^2 = bc + 3 \geq 2bc$, 所以 $bc \leq 3$.

从而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

11. A 设切线 MA 的方程为 $x = ty + m$, 代入抛物线方程得 $y^2 - ty - m = 0$. 由直线与抛物线相切得 $\Delta = t^2 + 4m = 0$, 则 $A\left(\frac{t^2}{4}, \frac{t}{2}\right), B\left(\frac{t^2}{4}, -\frac{t}{2}\right)$. 将点 A 的坐标代入 $x = ty + m$, 得 $m = -\frac{t^2}{4}$, 所以 $M\left(-\frac{t^2}{4}, 0\right)$.

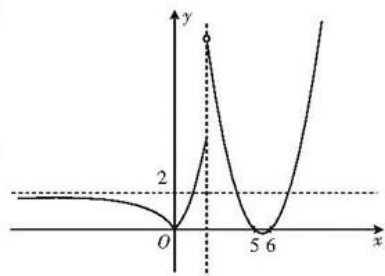
故 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{4} = \frac{1}{4} \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}$. 当 $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的最小值为 $-\frac{1}{16}$.

12. B 不妨设 $a < b < c < d$, 由 $2 - 2^{a+1} = 2^{b+1} - 2$, 得 $2^a + 2^b = 2$. 结合图

象(右图)可知, $c + d = 11, c \in (4, 5)$, 则 $2^c + 2^d = 2^c + 2^{11-c} = 2^c + \frac{2^{11}}{2^c}$.

令 $g(t) = t + \frac{2^{11}}{t}$ ($16 < t < 32$), 易知 $g(t)$ 在 $(16, 32)$ 上单调递减,

故 $2^c + 2^d \in (96, 144)$, 则 $2^a + 2^b + 2^c + 2^d \in (98, 146)$.



13. 1 因为 $|e_1 - \sqrt{3}e_2|^2 = 1 - 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 1$, 所以 $|e_1 - \sqrt{3}e_2| = 1$.

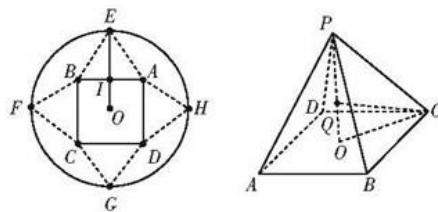
14. 2 作出不等式组表示的可行域, 由图可知(图略), 当直线 $y = -x + z$ 过点 $(4, -2)$ 时, $z = x + y$ 取得最大值, 最大值为 2.

15. $-\sqrt{3}$ 由题可得 $m = \frac{2\cos 140^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{-2\cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{-2\cos(30^\circ + 10^\circ) - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{-\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = -\sqrt{3}$.

16. $\frac{500\sqrt{3}\pi}{27}$ 如下图, 连结 OE 交 AB 于点 I , 设 E, F, G, H 重合于点 P , 正方形的边长为 x ($x > 0$), 则 $OI = \frac{x}{2}$,

$IE = 6 - \frac{x}{2}$. 因为该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍, 所以 $4 \cdot \frac{x}{2} \left(6 - \frac{x}{2}\right) = 2x^2$, 解得 $x = 4$. 设该四棱锥的外接球的球心为 Q , 半径为 R , 则 $OC = 2\sqrt{2}, OP = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}, R^2 = (2\sqrt{3} - R)^2 + (2\sqrt{2})^2$, 解得 $R = \frac{5}{\sqrt{3}}$,

外接球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{500\sqrt{3}\pi}{27}$.



17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 a_3, a_6, a_{11} 成等比数列,

所以 $a_6^2 = a_3 a_{11}$. 即 $(a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 10d)$ 3 分

化简得 $5d - 2a_1 = 0$ 5 分

又 $a_1=5$, 所以 $d=2$. 从而 $a_n=2n+3$ 6 分
 (2) 因为 $b_n=(2n+3) \cdot 3^{n-1}$, 7 分
 所以 $S_n=5 \times 3^0+7 \times 3^1+9 \times 3^2+\dots+(2n+3)3^{n-1}$ 8 分
 所以 $3S_n=5 \times 3^1+7 \times 3^2+9 \times 3^3+\dots+(2n+3)3^n$ 9 分
 以上两个等式相减得 $-2S_n=5+2 \times \frac{3(3^{n-1}-1)}{2}-(2n+3)3^n$, 11 分
 化简得 $S_n=(n+1)3^n-1$ 12 分

18. 解: (1) 被系统评为“积极性”的概率为 $\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$, $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$.

故 $P(X \leq 2)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{98}{125}$ 2 分

X 的数学期望 $E(X)=3 \times \frac{3}{5}=\frac{9}{5}$ 5 分

(2) “ $x>y$ ”包含“ $x=3, y=2$ ”, “ $x=3, y=1$ ”, “ $x=3, y=0$ ”, “ $x=2, y=1$ ”, “ $x=2, y=0$ ”, “ $x=1, y=0$ ”,

$P(x=3, y=2)=\frac{C_3^3 \times C_2^2}{C_5^5}=\frac{1}{30}$, 6 分

$P(x=3, y=1)=\frac{C_3^3 \times C_2^1 C_1^1}{C_5^5}=\frac{2}{15}$, 7 分

$P(x=3, y=0)=\frac{C_3^3 \times C_2^0}{C_5^5}=\frac{1}{30}$, 8 分

$P(x=2, y=1)=\frac{C_4^2 C_1^1}{C_5^5} \times \frac{C_2^1 C_1^1}{C_4^4}=\frac{2}{5}$, 9 分

$P(x=2, y=0)=\frac{C_4^2 C_1^1}{C_5^5} \times \frac{C_2^0}{C_4^4}=\frac{1}{10}$, 10 分

$P(x=1, y=0)=\frac{C_4^1 C_2^2}{C_5^5} \times \frac{C_2^0}{C_4^4}=\frac{1}{30}$, 11 分

所以 $P(x>y)=\frac{1}{30}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{11}{15}$ 12 分

19. (1) 证明: 由题可得 $EF \parallel AD$, 则 $AE \perp EF$, 1 分

又 $AE \perp CF$, 且 $EF \cap CF=F$, 所以 $AE \perp$ 平面 $EBCF$ 3 分

因为 $AE \subset$ 平面 $AEFD$, 所以平面 $AEFD \perp$ 平面 $EBCF$ 5 分

(2) 解: (方法一) 过点 D 作 $DG \parallel AE$ 交 EF 于点 G , 连结 BG , 则 $DG \perp$ 平面 $EBCF$, $DG \perp EC$.

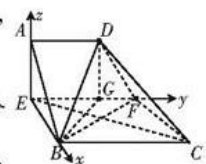
又 $BD \perp EC$, $BD \cap DG=D$, 所以 $EC \perp$ 平面 BGD , $EC \perp BG$ 6 分

易证 $\triangle EGB \sim \triangle BEC$, 则 $\frac{EG}{EB}=\frac{EB}{BC}$, 得 $EB=2\sqrt{2}$ 7 分

以 E 为坐标原点, \vec{EB} 的方向为 x 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$.

则 $F(0, 3, 0)$, $D(0, 2, 2\sqrt{2})$, $C(2\sqrt{2}, 4, 0)$, $A(0, 0, 2\sqrt{2})$, $B(2\sqrt{2}, 0, 0)$.

故 $\vec{BD}=(-2\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2})$, $\vec{FD}=(0, -1, 2\sqrt{2})$, $\vec{BC}=(0, 4, 0)$, $\vec{CD}=(-2\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2})$ 9 分



设 $n=(x,y,z)$ 是平面 FBD 的法向量, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BD} = -2\sqrt{2}x + 2y + 2\sqrt{2}z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{FD} = -y + 2\sqrt{2}z = 0, \end{cases}$

令 $z=1$, 得 $n=(3, 2\sqrt{2}, 1)$ 10分

设 $m=(a,b,c)$ 是平面 BCD 的法向量, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BC} = 4b = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CD} = -2\sqrt{2}a - 2b + 2\sqrt{2}c = 0, \end{cases}$

令 $a=1$, 得 $m=(1, 0, 1)$ 11分

因为 $\cos\langle n, m \rangle = \frac{n \cdot m}{|n| |m|} = \frac{4}{\sqrt{18} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{3}$, 所以二面角 $F-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$ 12分

(方法二)依题意可得 $EF \perp$ 平面 $AEB, BC \parallel EF$.

即 $BC \perp$ 平面 AEB , 所以平面 $ABCD \perp$ 平面 AEB .

取 AB 的中点 M, CD 的中点 N , 连结 EM, MN, FN ,

因为 $AE=BE$, 所以 $EM \perp AB$.

又平面 $AEB \cap$ 平面 $ABCD=AB$, 所以 $EM \perp$ 平面 $ABCD$ 6分

因为 $MN \parallel BC$, 且 $MN=3, EF \parallel BC$, 且 $EF=3$,

所以 $MN \parallel EF$. 即四边形 $EMNF$ 是平行四边形.

所以 $EM \parallel FN$. 从而 $FN \perp$ 平面 $ABCD$. 所以 $FN \perp BD$ 7分

作 $NH \perp BD$ 交 BD 于点 H , 连结 FH , 因为 $FN \perp BD, NH \perp BD$, 所以 $BD \perp$ 平面 NFH . 所以 $BD \perp HF$, 所以 $\angle FHN$ 是二面角 $F-BD-C$ 的平面角. 8分

过点 D 作 $DG \parallel AE$ 交 EF 于点 G , 连结 BG , 则 $DG \perp$ 平面 $EBCF, DG \perp EC$.

又 $BD \perp EC, BD \cap DG=D$, 所以 $EC \perp$ 平面 $BDG, EC \perp BG$ 9分

易证 $\triangle EGB \sim \triangle BEC$, 则 $\frac{EG}{EB} = \frac{EB}{BC}$, 得 $EB=2\sqrt{2}$ 10分

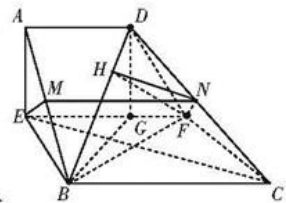
易得 $FD=3, DC=2\sqrt{5}, FN=EM=2, BD=2\sqrt{5}$.

在 $\triangle BDC$ 中, $\cos\angle BDC = \frac{BD^2 + DC^2 - BC^2}{2BD \cdot DC} = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\angle BDC = \frac{4}{5}$.

由 $\sin\angle BDC = \frac{4}{5} = \frac{NH}{DN}$, 得 $NH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 11分

所以 $\tan\angle FHN = \frac{2}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $\cos\angle FHN = \frac{2}{3}$.

所以二面角 $F-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$ 12分



20. 解:(1)由题意可得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases}$, 2分

解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$. 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0,

故可设直线 l 的方程为 $y = kx + m (m \neq 0)$, 点 P, Q 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{由 } S_{\triangle PMO} = \frac{1}{2} |MO| |y_1|, S_{\triangle QMO} = \frac{1}{2} |MO| |y_2|, S_{\triangle PNO} = \frac{1}{2} |NO| |x_1|, S_{\triangle QNO} = \frac{1}{2} |NO| |x_2|,$$

$$\text{化简得 } \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1 y_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1 y_2} - 2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 2, \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2}, \text{即 } \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = k^2, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \Delta = 64k^2m^2 - 16(1 + 4k^2)(m^2 - 1) = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0, \text{且 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2}.$$

$$\text{故 } y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2}{x_1 x_2} = k^2, \text{即 } \frac{-8k^2 m^2}{1 + 4k^2} + m^2 = 0. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

又 $m \neq 0$, 所以 $k^2 = \frac{1}{4}$. 又结合图象可知, $k = -\frac{1}{2}$, 所以直线 l 的斜率为定值. 12 分

21. 解: (1) $f'(x) = (x-1)e^x + a\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{(x-1)(xe^x - a)}{x} (x > 0)$, 1 分

令 $g(x) = xe^x - a (x > 0)$, $g'(x) = (x+1)e^x > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

则 $g(x) > g(0) = -a$ 3 分

因此, 当 $a \leq 0$ 或 $a = e$ 时, $f'(x)$ 只有一个零点; 4 分

当 $0 < a < e$ 或 $a > e$ 时, $f'(x)$ 有两个零点. 5 分

(2) 当 $a \leq 0$ 时, $xe^x - a > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值 $f(1) = -e$ 7 分

当 $a > 0$ 时, 则函数 $y = xe^x - a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则必存在正数 x_0 ,

使得 $x_0 e^{x_0} - a = 0$ 8 分

若 $a > e$, 则 $x_0 > 1$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 与 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, x_0)$ 上单调递减,

又 $f(1) = -e$, 故不符合题意. 9 分

若 $a = e$, 则 $x_0 = 1$, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(1) = -e$, 故不符合题意. 10 分

若 $0 < a < e$, 则 $0 < x_0 < 1$, 设正数 $b = e^{\frac{1}{a} - 1} \in (0, 1)$,

$$\text{则 } f(b) = (b-2)e^b + a(\ln b - b + 1) < a(\ln e^{\frac{1}{a} - 1} - b + 1) = a\left(-\frac{e}{a} - b\right) = -e - ab < -e,$$

与函数 $f(x)$ 的最小值为 $-e$ 矛盾. 11 分

综上所述, $a \leq 0$, 即 $a \in (-\infty, 0]$ 12 分

22. 解: (1) 因为圆 C_1 的普通方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$,

把 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入方程得 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 8\rho \sin \theta = 0$.

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos \theta + 8\sin \theta$, 2 分

C_2 的平面直角坐标系方程为 $y = \sqrt{3}x$ 4 分

(2) 分别将 $\theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho = 4\cos \theta + 8\sin \theta$, 得 $\rho_1 = 2 + 4\sqrt{3}, \rho_2 = 4 + 2\sqrt{3}$ 8 分

则 $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (2 + 4\sqrt{3}) \times (4 + 2\sqrt{3}) \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 8 + 5\sqrt{3}$ 10 分

23. 解: (1) 由题意可得 $g(x) = \begin{cases} -3x+3, & x \leq -2 \\ -5x-1, & -2 < x < \frac{1}{4} \\ 3x-3, & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$, 1 分

当 $x \leq -2$ 时, $-3x+3 < 6$, 得 $x > -1$, 无解; 2 分

当 $-2 < x < \frac{1}{4}$ 时, $-5x-1 < 6$, 得 $x > -\frac{7}{5}$, 即 $-\frac{7}{5} < x < \frac{1}{4}$; 3 分

当 $x \geq \frac{1}{4}$ 时, $3x-3 < 6$, 得 $\frac{1}{4} \leq x < 3$ 4 分

综上, $g(x) < 6$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{7}{5} < x < 3\right\}$ 5 分

(2) 因为存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) = -g(x_2)$ 成立,

所以 $\{y \mid y = f(x), x \in \mathbf{R}\} \cap \{y \mid y = -g(x), x \in \mathbf{R}\} \neq \emptyset$ 6 分

又 $f(x) = 3|x-a| + |3x+1| \geq |(3x-3a) - (3x+1)| = |3a+1|$, 7 分

由(1)可知 $g(x) \in \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$, 则 $-g(x) \in \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ 8 分

所以 $|3a+1| \leq \frac{9}{4}$, 解得 $-\frac{13}{12} \leq a \leq \frac{5}{12}$.

故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{13}{12}, \frac{5}{12}\right]$ 10 分