

河南省一轮复习诊断调研考试 数学(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分,考试时间120分钟.
2. 请将各题答案填在试卷后面的答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

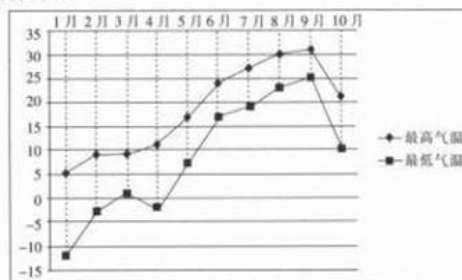
1. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 复数 $z = \frac{(a-i)(1+i)}{i}$, 若 $\bar{z} = z$, 则 $a =$

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

2. 已知集合 $M = \{x | \frac{x-3}{x-1} \leq 0\}$, $N = \{x | y = \log_2(-6x^2 + 11x - 4)\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $[1, \frac{4}{3}]$ B. $(\frac{1}{2}, 3]$ C. $(1, \frac{4}{3})$ D. $(\frac{4}{3}, 2)$

3. 某城市收集并整理了该市2017年1月份至10月份各月最低气温与最高气温(单位:℃)的数据,绘制了下面的折线图.



已知该市的各月最低气温与最高气温具有较好的线性关系,则根据该折线图,下列结论错误的是

- A. 最低气温与最高气温为正相关
B. 10月的最高气温不低于5月的最高气温
C. 月温差(最高气温减最低气温)的最大值出现在1月
D. 最低气温低于0℃的月份有4个

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt[3]{4}$, 则 $\frac{a_1 + a_{11}}{a_7 + a_{21}} =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

- 5.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著,书中有如下问题:“今有阳马,广五尺,袤七尺,高八尺,问积几何?”其意思为:“今有底面为矩形,一侧棱垂直于底面的四棱锥,它的底面长、宽分别为7尺和5尺,高为8尺,问它的体积是多少?”若以上的条件不变,则这个四棱锥的外接球的表面积为

A. 128π 平方尺 B. 138π 平方尺 C. 140π 平方尺 D. 142π 平方尺

6. 定义 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\{x\}=x-[x]$,例如 $[2.1]=2$, $\{2.1\}=0.1$,执行如图所示的程序框图,若输入的 $x=5.8$,则输出的 $z=$

A. -1.4 B. -2.6
C. -4.6 D. -2.8

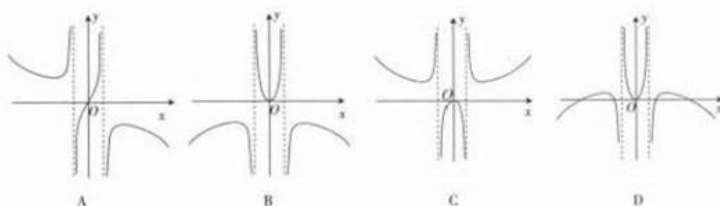
7. 若对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x)+2f(-x)=3\cos x-\sin x$,则函数 $f(2x)$ 图象的对称中心为

A. $(k\pi-\frac{\pi}{4}, 0) (k \in \mathbf{Z})$ B. $(k\pi-\frac{\pi}{8}, 0) (k \in \mathbf{Z})$
C. $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}, 0) (k \in \mathbf{Z})$ D. $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}, 0) (k \in \mathbf{Z})$

8. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x-y \geq 0 \\ x+\frac{1}{3}y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$,若 $z=-ax+y$ 取得最大值的最优解不唯一,则实数 a 的值为

A. 2或-3 B. 3或-2 C. $-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{3}$ 或2

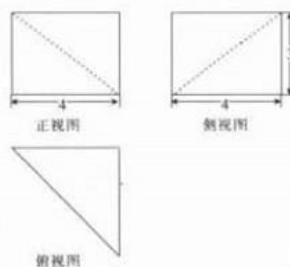
9. 函数 $f(x)=\frac{x(e^{-x}-e^x)}{4x^2-1}$ 的部分图象大致是



10. 已知某几何体的三视图如图所示,则该几何体的表面积为

A. $20+12\sqrt{2}+2\sqrt{14}$
B. $20+6\sqrt{2}+2\sqrt{14}$
C. $20+6\sqrt{2}+2\sqrt{34}$
D. $20+12\sqrt{2}+2\sqrt{34}$

11. 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F(1, 0)$, 点 $A(-1, 1)$ 为椭圆 E 内一点,若椭圆 E 上存在一点 P ,



使得 $|PA| + |PF| = 9$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是

- A. $[\frac{1}{2}, 1)$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

12. 已知函数 $f(x) = \ln x + (2e^2 - a)x - \frac{b}{2}$, 其中 e 是自然对数的底数. 若不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 则 $\frac{b}{a}$ 的最小值为

- A. $-\frac{1}{e^2}$ B. $-\frac{2}{e^2}$ C. $-\frac{1}{e}$ D. $-\frac{2}{e}$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{1cm}}$.

14. 已知 $(1+x)(a-x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_7x^7$, $a \in \mathbb{R}$, 若 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 + a_7 = 0$, 则 $a_6 = \underline{\hspace{1cm}}$.

15. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, 恒有 $ka_n = a_n S_n - S_n^2$ 成立, 若 $S_m = \frac{1}{50}$, 则 $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

16. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与双曲线分别交于点 A, B , 且 $A(m, 18)$ 在第一象限, 若 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 则双曲线的实轴长为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

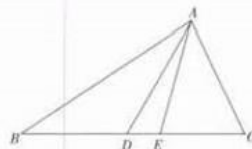
(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c = 4, b = 2, 2\cos C = b$, D, E 分别为线段 BC 上的点, 且 $BD = CD, \angle BAE = \angle CAE$.

(1) 求线段 AD 的长;

(2) 求 $\triangle ADE$ 的面积.



18. (12 分)

某班为了活跃元旦晚会气氛, 主持人请 12 位同学做一个游戏, 第一轮游戏中, 主持人将标有数字 1 到 12 的十二张相同的卡片放入一个不透明的盒子中, 每人依次从中取出一张卡片, 取到标有数字 7 到 12 的卡片的同学留下, 其余的淘汰; 第二轮将标有数字 1 到 6 的六张相同的卡片放入一个不透明的盒子中, 每人依次从中取出一张卡片, 取到标有数字 4 到 6 的卡片的同学留下, 其余的淘汰; 第三轮将标有数字 1, 2, 3 的三张相同的卡片放入一个不透明的盒子中, 每人依次从中取出一张卡片, 取到标有数字 2, 3 的卡片的同学留下, 其余的淘汰; 第四轮用同样的办法淘汰一位同学, 最后留下的这位同学获得一个奖品. 已知同学甲参加了该游戏.

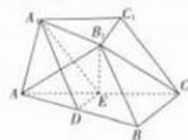
(1) 求甲获得奖品的概率;

(2) 设 X 为甲参加游戏的轮数, 求 X 的分布列与数学期望.

19. (12分)

如图,在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, AC 的中点, $B_1E \perp$ 平面 ABC , $\triangle AB_1C$ 是等边三角形, $AB=2A_1B_1, AC=2BC, \angle ACB=90^\circ$.

- (1)证明: $B_1C \parallel$ 平面 A_1DE ;
- (2)求二面角 $A-BB_1-C$ 的正弦值.



20. (12分)

已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$, 斜率为 k 且过点 $M(3, 0)$ 的直线 l 与 E 交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 3 = 0$, 其中 O 为坐标原点.

- (1)求抛物线 E 的方程;
- (2)设点 $N(-3, 0)$, 记直线 AN, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{2}{k}$ 为定值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = (x+1)e^x (a \neq 0)$, 且 $x = \frac{2}{a}$ 是它的极值点.

- (1)求 a 的值;
- (2)求 $f(x)$ 在 $[t-1, t+1]$ 上的最大值;
- (3)设 $g(x) = f(x) + 2x + 3\ln x$, 证明: 对任意 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 都有 $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e} + 1$.

(二)选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - \sqrt{3} \\ y = kt \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 直线 l_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} - m \\ y = \frac{m}{3k} \end{cases} (m \text{ 为参数}), \text{ 设直线 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 的交点为 } P, \text{ 当 } k \text{ 变化时点 } P \text{ 的轨迹为曲线 } C_1.$$

- (1)求出曲线 C_1 的普通方程;
- (2)以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}$, 点 Q 为曲线 C_1 的动点, 求点 Q 到直线 C_2 的距离的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知 $f(x) = |x+a| (a \in \mathbf{R})$.

- (1)若 $f(x) \geq |2x+3|$ 的解集为 $[-3, -1]$, 求 a 的值;
- (2)若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x) + |x-a| \geq a^2 - 2a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

数学详细参考答案(理科)

1. B 【解析】 本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

$$z = \frac{(a-1)(1+i)}{i} = (a-1) - (a+1)i, \text{ 由 } z = \bar{z} \text{ 可知 } z \text{ 为实数, 则 } a+1=0, \text{ 解得 } a=-1.$$

2. C 【解析】 本题考查集合的交集,考查运算求解能力.

$$\text{因为 } M = (1, 3], N = (-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}), \text{ 所以 } M \cap N = (1, \frac{4}{3}).$$

3. D 【解析】 本题考查统计知识以及变量的相关性问题,考查数据处理能力和应用意识.

根据以上折线图,可以大致列表如下:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最高气温	5	9	9	11	17	24	27	30	31	21
最低气温	-12	-3	1	-2	7	17	19	23	25	10
温差	17	12	8	13	10	7	8	7	6	11

除了4月和10月的数据,其它8个月,最高气温随着最低气温的升高而升高,A正确;

B明显正确;经过粗略计算知温差最大值出现在1月,C正确;由折线图可知,最低气温低于 0°C 的只有1月、2月、4月,D错误.

4. A 【解析】 本题考查等比数列的通项公式和性质,考查运算求解能力.

$$\text{设等比数列 } \{a_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{ 可得 } \frac{a_1 + a_{16}}{a_7 + a_{21}} = \frac{a_1 + a_{16}}{q^6(a_1 + a_{15})} = \frac{1}{q^6}, \text{ 因为 } a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt[3]{4}, \text{ 所以 } \frac{1}{q^6} = (\frac{a_2}{a_3})^6 = \frac{1}{2}.$$

5. B 【解析】 本题考查数学文化以及四棱锥的外接球问题,考查空间想象力和运算求解能力.

设四棱锥外接球的半径为 r ,则 $(2r)^2 = 5^2 + 7^2 + 8^2 = 138$,所以 $S_{球} = 4\pi r^2 = 138\pi$.

6. C 【解析】 本题考查算法初步的程序框图问题,考查运算求解能力.

$$x=5.8, y=3.4, x=4;$$

$$x=1.7, y=1-2 \times 0.7 = -0.4, x=1-1=0;$$

$$x=-0.2, y=-1-2 \times 0.8 = -2.6, x=-1-1=-2;$$

因为 $-2 < 0$,所以输出的 $z = -2 - 2.6 = -4.6$.

7. D 【解析】 本题考查三角函数的图象及其性质,考查运算求解能力.

$$\text{因为 } f(x) + 2f(-x) = 3\cos x - \sin x, \text{ 所以 } f(-x) + 2f(x) = 3\cos x + \sin x,$$

$$\text{解得 } f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}), \text{ 所以 } f(2x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}).$$

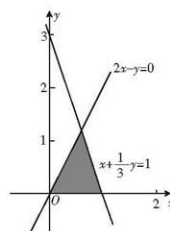
$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 得 } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{所以其对称中心为 } (\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, 0) (k \in \mathbb{Z}).$$

8. A 【解析】 本题考查线性规划问题,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

如图,当 $a > 0$ 时, $a=2$;当 $a < 0$ 时, $a=-3$;当 $a=0$ 时,不合题意.

9. B 【解析】 本题考查函数的图象与性质问题,考查数形结合思想和推理论证能力.



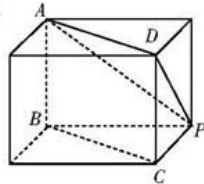
因为 $f(-x) = \frac{-x(e^x - e^{-x})}{4x^2 - 1} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $f(x) = \frac{x(e^x - e^{-x})}{4x^2 - 1} > 0$, 当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$. 当 $x < 0$ 时, 根据对称性可判断图形的形状, 所以符合条件的为 B.

10. D 【解析】 本题考查三视图以及简单几何体的体积与表面积, 考查空间想象力和运算求解能力.

原几何体是右图长方体中的四棱锥 $P-ABCD$, 其中 $PB=PC=4$, $AB=3$,

所以 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD} = 6$, $S_{\triangle PBC} = 8$, $S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{25 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{34}$,

$S_{\square ABCD} = 12\sqrt{2}$, 所以, 表面积 $S = 20 + 12\sqrt{2} + 2\sqrt{34}$.



11. C 【解析】 本题考查椭圆的定义和性质, 考查运算求解能力和化归与转化的思想.

设 $F'(-1, 0)$, 则 $|PF'| + |PF| = 2a$, 即 $|PF| = 2a - |PF'|$, 又椭圆 E 上存在一点 P 使得 $|PA| + |PF| = 9$,

所以 $|PA| + |PF| = |PA| + 2a - |PF'| = 9$, 即 $|PA| - |PF'| = 9 - 2a$,

因为 $-|AF'| \leq |PA| - |PF'| \leq |AF'|$,

所以 $-1 \leq |PA| - |PF'| \leq 1$, 即 $-1 \leq 9 - 2a \leq 1$, 解得 $4 \leq a \leq 5$,

因为 $c=1$, 所以 $\frac{1}{5} \leq e \leq \frac{1}{4}$.

12. B 【解析】 本题考查导数与最值问题的综合题型, 考查转化与化归、函数与方程以及运算求解能力和推理论证能力.

由不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 可得 $f(x)_{\max} \leq 0$. 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} + (2e^2 - a)(x > 0)$,

当 $2e^2 - a \geq 0$, 即 $a \leq 2e^2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

此时 $f(x) \leq 0$ 不可能恒成立.

当 $2e^2 - a < 0$, 即 $a > 2e^2$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a - 2e^2}$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{a - 2e^2}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a - 2e^2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a - 2e^2}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a - 2e^2}) = -\ln(a - 2e^2) - 1 - \frac{b}{2} \leq 0$,

即 $\frac{b}{2} \geq -\ln(a - 2e^2) - 1 (a > 2e^2)$, 所以 $\frac{b}{2a} \geq \frac{-\ln(a - 2e^2) - 1}{a}$. 令 $g(a) = \frac{-\ln(a - 2e^2) - 1}{a} (a > 2e^2)$,

再令 $a - 2e^2 = t (t > 0)$, 则 $a = t + 2e^2$, 则 $g(a) = \varphi(t) = \frac{-\ln t - 1}{t + 2e^2} (t > 0)$, $\varphi'(t) = \frac{\ln t - \frac{2e^2}{t}}{(t + 2e^2)^2}$. 令 $\ln t - \frac{2e^2}{t} = 0$, 得 $t = e^2$,

由数形结合得, 当 $t \in (0, e^2)$ 时, $\varphi'(t) < 0$; 当 $t \in (e^2, +\infty)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, 所以 $\varphi(t) \geq \varphi(e^2) = -\frac{1}{e^2}$, 所以 $\frac{b}{2a} \geq$

$\frac{-\ln(a - 2e^2) - 1}{a} \geq -\frac{1}{e^2}$, 即 $\frac{b}{a} \geq -\frac{2}{e^2}$.

13. -4 【解析】 本题考查平面向量的坐标运算以及数量积, 考查运算求解能力.

由 $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$ 得: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) = -|\vec{AB}|^2 = -4$.

14. -5 【解析】 本题考查二项式定理的应用, 考查运算求解能力.

令 $x=1$, 所以 $2(a-1)^6 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 0$, 所以 $a=1$,

$(1+x)(1-x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_7x^7$ 中 $a_3 = C_6^3(-1)^3 + C_6^2(-1)^2 = -20 + 15 = -5$.

15. 2 【解析】 本题考查数列的综合问题以及裂项求和问题, 考查运算求解能力与化归与转化的思想.

当 $n \geq 2$ 时, 恒有 $ka_n = a_n S_n - S_n^2$, 所以 $k(S_n - S_{n-1}) = (S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2$,

整理得: $k(S_n - S_{n-1}) = -S_{n-1}S_n$, 即 $k(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}}) = 1$, 可得: $k(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}) = 1, k(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_2}) = 1, \dots, k(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k-1}}) = 1$,
以上式子相加得: $k(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_1}) = 98$, 所以 $k(50 - 1) = 98$, 解得 $k = 2$.

16. $2\sqrt{21}$ 【解析】 本题考查双曲线的定义和性质, 考查推理论证和运算求解能力.

由定义知 $|BF_2| - |BF_1| = 2a$, $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 又 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 所以 $|AF_1| - |AF_2| = |BF_1| = 2a$, 所以 $|BF_2| = 4a$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, $|AF_1| = 6a$, $|AF_2| = 4a$, $|F_1F_2| = 2c$, $\angle F_1AF_2 = 60^\circ$, 由余弦定理得 $4c^2 = 36a^2 + 16a^2 - 2 \times 6a \times 4a \times \cos 60^\circ$, 所以 $c^2 = 7a^2$, 所以 $\frac{1}{2} \times 2c \times 18 = \frac{1}{2} \times 6a \times 4a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $a^2 = 21$, 所以 $2a = 2\sqrt{21}$.

17. (1) 解: 因为 $c = 4, b = 2$, 所以 $\cos C = \frac{b}{2c} = \frac{1}{4}$ 2 分

由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + 4 - 16}{4a} = \frac{1}{4}$,

所以 $a = 4$, 即 $BC = 4$ 4 分

在 $\triangle ACD$ 中, $CD = 2, AC = 2$,

所以 $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD = 6$, 所以 $AD = \sqrt{6}$ 6 分

(2) 因为 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,

所以 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE}{\frac{1}{2}AC \cdot AE \cdot \sin \angle CAE} = \frac{AB}{AC} = 2$, ... 8 分

又 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{BE}{EC}$, 所以 $\frac{BE}{EC} = 2$,

所以 $CE = \frac{1}{3}BC = \frac{4}{3}, DE = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ 10 分

又因为 $\cos C = \frac{1}{4}$, 所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 11 分

所以 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times DE \times AC \times \sin C = \frac{\sqrt{15}}{6}$ 12 分

18. 解: (1) 设甲获得奖品为事件 A , 在每轮游戏中, 甲留下的概率与他摸卡片的顺序无关,

则 $P(A) = \frac{6}{12} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ 5 分

(2) 随机变量 X 的取值可以为 1, 2, 3, 4. 6 分

$P(X=1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, ... 7 分

$P(X=2) = \frac{6}{12} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$, ... 8 分

$P(X=3) = \frac{6}{12} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, ... 9 分

$P(X=4) = \frac{6}{12} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ 10 分

X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

所以数学期望 $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{23}{12}$ 12 分

19. 解: (1) 证明: 因为 $A_1B_1 \parallel AB, AB = 2A_1B_1, D$ 为棱 AB 的中点,

所以 $A_1B_1 \parallel BD, A_1B_1 = BD$,

所以四边形 A_1B_1BD 为平行四边形, 从而 $BB_1 \parallel A_1D$ 1 分

又 $BB_1 \not\subset$ 平面 $A_1DE, A_1D \subset$ 平面 A_1DE ,

所以 $B_1B \parallel$ 平面 A_1DE 2 分

因为 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $DE \parallel BC$,

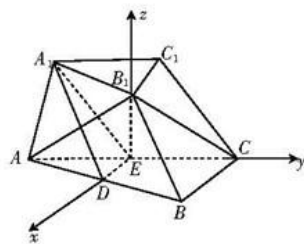
同理可证, $BC \parallel$ 平面 A_1DE 3 分

因为 $BB_1 \cap BC = B$, 所以平面 $B_1BC \parallel$ 平面 A_1DE 4 分

又 $B_1C \subset$ 平面 B_1BC , 所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1DE 5 分

(2) 以 ED, EC, EB_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,

设 $BC = a$, 则 $A(0, -a, 0), B(a, a, 0), C(0, a, 0), B_1(0, 0, \sqrt{3}a)$, 则 $\overrightarrow{AB_1} = (0, a, \sqrt{3}a), \overrightarrow{AB} = (a, 2a, 0)$ 6 分



设平面 ABB_1 的一个法向量 $m = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases}$

$$\text{即} \begin{cases} ay_1 + \sqrt{3}az_1 = 0, \\ ax_1 + 2ay_1 = 0, \end{cases}$$

取 $z_1 = 1$, 得 $m = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$ 8 分

同理, 设平面 BB_1C 的一个法向量 $n = (x, y, z)$,

$$\text{又} \overrightarrow{CB_1} = (0, -a, \sqrt{3}a), \overrightarrow{BC} = (-a, 0, 0),$$

$$\text{由} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -ax = 0, \\ -ay + \sqrt{3}az = 0, \end{cases}$$

取 $z = -1$, 得 $n = (0, -\sqrt{3}, -1)$ 10 分

$$\text{所以} \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{1}{4},$$

即二面角 $A-BB_1-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 12 分

20. 解: (1) 直线 l 的方程为 $y = k(x-3)$, 联立方程组 $\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = k(x-3) \end{cases}$,

$$\text{消元得} y^2 - \frac{2p}{k}y - 6p = 0, \text{ 1 分}$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{所以} y_1 + y_2 = \frac{2p}{k}, y_1 y_2 = -6p. \text{ 3 分}$$

$$\text{又} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{4p^2} + y_1 y_2 = 9 - 6p = -3, \text{ 4 分}$$

所以 $p = 2$, 从而抛物线 E 的方程为 $y^2 = 4x$ 5 分

$$(2) \text{ 因为 } k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 3} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} + 6}, k_2 = \frac{y_2}{x_2 + 3} = \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4} + 6},$$

$$\text{所以} \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k} + \frac{6}{y_1}, \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} + \frac{6}{y_2}, \text{ 7 分}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{2}{k^2} &= \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{y_2}\right)^2 - \frac{2}{k^2} \\ &= \frac{2}{k^2} + \frac{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) + 36\left(\frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2}\right) - \frac{2}{k^2} \\ &= \frac{12}{k} \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} + 36 \times \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{y_1^2 y_2^2}. \end{aligned} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又 } y_1 + y_2 = \frac{2p}{k} = \frac{4}{k}, y_1 y_2 = -6p = -12,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{2}{k^2} = \frac{12}{k} \times \frac{(-1)}{3k} + 36 \times \frac{\frac{16}{k^2} + 24}{144} = 6,$$

$$\text{即 } \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{2}{k^2} \text{ 为定值.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解: (1) } f'(x) = e^x + a(x+1)e^x = (a+1)e^x, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } x = \frac{2}{a} \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个极值点, 所以 } f'\left(\frac{2}{a}\right) = (a+1)e^{\frac{2}{a}} = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a = -3. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x) = (x+1)e^{-3x}, f'(x) = (-3x-2)e^{-3x},$$

$$\text{易知 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, -\frac{2}{3}) \text{ 上递增, 在 } (-\frac{2}{3}, +\infty) \text{ 上递减.} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{当 } t+1 \leq -\frac{2}{3}, \text{ 即 } t \leq -\frac{5}{3} \text{ 时, } f(x) \text{ 在 } [t-1, t+1] \text{ 上递增, } f(x)_{\max} = f(t+1) = (t+2)e^{-3(t+1)}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{当 } t-1 \geq -\frac{2}{3}, \text{ 即 } t \geq \frac{1}{3} \text{ 时, } f(x) \text{ 在 } [t-1, t+1] \text{ 上递减, } f(x)_{\max} = f(t-1) = te^{-3(t-1)}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } t-1 < -\frac{2}{3} < t+1, \text{ 即 } -\frac{5}{3} < t < \frac{1}{3} \text{ 时, } f(x)_{\max} = f(-\frac{2}{3}) = \frac{e^2}{3}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(3) g(x) = (x+1)e^{-3x} + 2x + 3\ln x, \text{ 设 } g(x) = m_1(x) + m_2(x), x \in (0, 1), \text{ 其中 } m_1(x) = (x+1)e^{-3x} + 2x, m_2(x) = 3\ln x,$$

$$\text{则 } m_1'(x) = (-3x-2)e^{-3x} + 2, \text{ 设 } h(x) = (-3x-2)e^{-3x} + 2, \text{ 则 } h'(x) = (9x+3)e^{-3x} > 0, \text{ 可知 } m_1'(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上是增函数,} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } m_1'(x) > m_1'(0) = 0, \text{ 即 } m_1(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上是增函数,}$$

$$\text{所以 } 1 < m_1(x) < 2 + \frac{2}{e^3}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又 } m_2'(x) = 3(1 + \ln x), \text{ 由 } m_2'(x) > 0, \text{ 得 } x > \frac{1}{e}; \text{ 由 } m_2'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < \frac{1}{e},$$

$$\text{所以 } m_2(x) \text{ 在 } (0, \frac{1}{e}) \text{ 上递减, 在 } (\frac{1}{e}, 1) \text{ 上递增,} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } -\frac{3}{e} \leq m_2(x) < 0, \text{ 从而 } 1 - \frac{3}{e} < m_1(x) + m_2(x) < 2 + \frac{2}{e^3}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以, 对任意 } x_1, x_2 \in (0, 1), |g(x_1) - g(x_2)| < (2 + \frac{2}{e^3}) - (1 - \frac{3}{e}) = \frac{2}{e^3} + \frac{3}{e} + 1. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{ 解: (1) 将 } l_1, l_2 \text{ 的参数方程转化为普通方程}$$

$$l_1: y = k(x + \sqrt{3}), \text{ ①} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$l_2: y = \frac{1}{3k}(\sqrt{3} - x), \text{ ②} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{①} \times \text{②} \text{ 消 } k \text{ 可得: } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因为 $k \neq 0$, 所以 $y \neq 0$, 所以 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1 (y \neq 0)$ 5 分

(2) 直线 C_2 的直角坐标方程为: $x + y - 8 = 0$ 6 分

由 (1) 知曲线 C_1 与直线 C_2 无公共点,

由于 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$, ... 7 分

所以曲线 C_1 上的点 $Q(\sqrt{3} \cos \alpha, \sin \alpha)$ 到直线 $x + y - 8 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - 8|}{\sqrt{2}} = \frac{|2 \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) - 8|}{\sqrt{2}}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以当 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = 1$ 时, d 的最小值为 $3\sqrt{2}$ 10 分

23. 解: (1) $f(x) \geq |2x + 3|$ 即 $|x + a| \geq |2x + 3|$, 平方整理得,

$$3x^2 + (12 - 2a)x + 9 - a^2 \leq 0, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以 $-3, -1$ 是方程 $3x^2 + (12 - 2a)x + 9 - a^2 = 0$ 的两根, ... 3 分

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{12 - 2a}{-3} = -4 \\ \frac{9 - a^2}{3} = 3 \end{cases}, \text{解得 } a = 0. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) f(x) + |x - a| \geq |(x + a) - (x - a)| = 2|a|, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + |x - a| \geq a^2 - 2a$ 恒成立, 所以 $2|a| \geq a^2 - 2a$ 7 分

当 $a \geq 0$ 时, $2a \geq a^2 - 2a$, 解得 $0 \leq a \leq 4$; 8 分

当 $a < 0$ 时, $-2a \geq a^2 - 2a$, 此时满足条件的 a 不存在, ... 9 分

综上可得, 实数 a 的取值范围是 $[0, 4]$ 10 分