太原市 2018 年初中毕业班综合测试(二)

数　学

一、选择题(本大题共 10 个小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. 下列四个数表示在数轴上,它们对应的点中,离原点最远的是（　）

A.-2　　B.-1　　C.0　　D.1

【答案】A

【考点】绝对值的几何意义

【解析】|a|表示数 a 在数轴上对应的点到原点的距离，|-2|=2，|-1|=1，|0|=0，|1|=1，2＞1＞0，故答案选择 A 选项

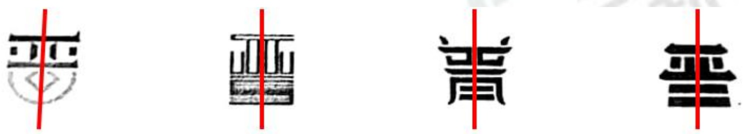
2. 山西有着悠久的历史,远在 100 多万年前就有古人类生息在这块土地上.春秋时期,山西大部分为晋国领地,故山西简称为“晋”,战国初韩、赵、魏三分晋,山西又有“三晋”之称,下面四个以“晋”字为原型的 Logo 图案中,是轴对称图形的共有（　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

【答案】D

【考点】轴对称图形

【解析】如图可知，轴对称图形共 4 个，故答案选择 D 选项



3. 下列运算结果正确的是（　）

$A.\left(x^{3}-x^{2}+x\right)\div x=x^{2}-x$　　　　$B.\left(-a^{2}\right)\cdot a^{3}=a^{6}$

$C.\left(-2x^{2}\right)^{3}=-8x^{6}$　　　　$D.4a^{2}-\left(2a\right)^{2}=2a^{2}$

【答案】C

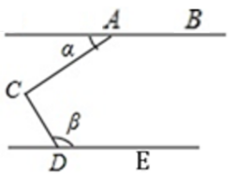
【考点】整式的乘除

【解析】A.$(x^3-x^2+x)\div x=x^2-x+1$；　　B.$(-a^2)\cdot a^3=-a^5$；

C.$(-2x^2)^3=(-2)^3\cdot(x^2)^3=-8x^6$；　　D.$4a^2-(2a)^2=4a^2-4a^2=0$

故答案选择 C 选项

4. 如图,点 C 是直线 AB,DE 之间的一点,∠ACD=90°,下列条件能使得 AB∥DE 的是（　）

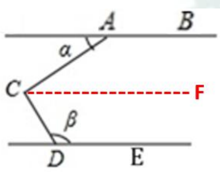


A. ∠α+∠β=180°　　B. ∠β−∠α=90°　　C. ∠β=3∠α　　D. ∠α+∠β=90°

【答案】B

【考点】平行线拐角模型

【解析】过点 C 做 CF∥AB，∵DE∥AB，∴CF∥DE，∴∠ACF=∠α，∠FCD=180°-∠β，又∵∠ACD=90°，∴∠ACF+∠FCD=∠ACD=90°，即∠α+180°-∠β=90°，化简得∠β-∠α=90°，故答案选择 B 选项



5. 2017 年,山西省经济发展由“疲”转“兴”,经济增长步入合理区间,各项社会事业发展取得显著成绩,全面建成小康社会迈出崭新步伐.2018 年经济总体保持平稳,第一季度山西省地区生产总值约为 3122 亿元,比上年增长 6.2%.数据 3122 亿元用科学记数法表示为（ ）

A.3122×10^{8} 元　　　B.3.122×10^{3} 元

C.3122×10^{11} 元　　　D.3.122×10^{11} 元

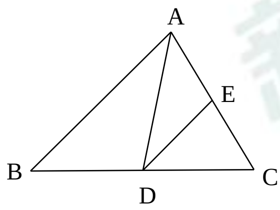
【答案】D

【考点】科学记数法

【解析】方法一：3122 亿元=3.122×10^{3} 亿元，1 亿元=1×10^{8} 元，即 3122 亿元=3.122×10^{11} 元

方法二：3122 亿元=312200000000 元=3.122×10^{11} 元，故答案选择 D 选项

6. 如图,AD 为△ABC 的中线,点 E 为 AC 边的中点,连接 DE,则下列结论中不一定成立的是（ ）



$A.DC=DE$　　$B.AB=2DE$　　$C.S_{\Delta CDE}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC}$　　$D.DE\parallel AB$

【答案】A

【考点】三角形中位线性质；三角形的相似

【解析】∵AD 是△ABC 中线，∴D 是 BC 中点，又∵E 是 AC 中点，∴DE 是△ABC 的中位线，∴AB=2DE，DE∥AB，故 B、D 选项正确；∵DE∥AB，∴∠CDE=∠B，∠CED=∠CAB，∴△CDE∽△CBA，∴$\dfrac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBA}}=\left(\dfrac{CD}{CB}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore S_{\triangle CDE}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，故 C 选项正确；无法证明 A 选项，故答案选择 A 选项

7. 我国古代数学著作《九章算术》卷七“盈不足”中有这样一个问题:“今有共买物,人出八,盈三；人出七,不足四,问人数、物价各几何?”意思是:几个人合伙买一件物品,每人出 8 元,则余 3 元;若每人出 7 元,则少 4 元,问几人合买?这件物品多少钱?若设有 x 人合买,这件物品 y 元,则根据题意列出的二元一次方程组为（　）

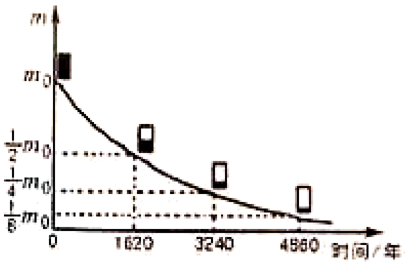
$A.\begin{cases}8x=y-3\\7x=y+4\end{cases}$　　$B.\begin{cases}8x=y+4\\7x=y-3\end{cases}$　　$C.\begin{cases}3x=y+8\\4x=y-7\end{cases}$　　$D.\begin{cases}8x=y+3\\7x=y-4\end{cases}$

【答案】D

【考点】二元一次方程组的实际应用

【解析】由题意，每人出 8 元，则余 3 元，可列 8x=y+3；每人出 7 元，则少 4 元，可列 7x=y-4，故答案选择 D 选项

8. 1903 年、英国物理学家卢瑟福通过实验证实,放射性物质在放出射线后,这种物质的质量将减少,减少的速度开始较快,后来较慢,实际上,放射性物质的质量减为原来的一半所用的时间是一个不变的量,我们把这个时间称为此种放射性物质的半衰期,如图是表示镭的放射规律的函数图象,根据图象可以判断,镭的半衰期为（　）



A.810 年　　B.1620 年　　C.3240 年　　D.4860 年

【答案】B

【考点】反比例函数的实际应用

【解析】由题意得半衰期指放射性物质质量减为原来的一半所用的时间，而且该时间是一个不变的量。根据图象可知，质量每减少一半需要 1620 年，所以半衰期为 1620 年，故选 B

9. 小明和小亮按如图所示的规则玩一次“锤子、剪刀、布”游戏,下列说法中正确的是（　）

游戏规则：若一人出“剪刀”，另一人出“布”，则出“剪刀”者胜；若一人出“锤子”，另一人出“剪刀”，则出“锤子”者胜；若一人出“布”，另一人出“锤子”，则出“布”者胜．若两人出相同的手势，则两人平局．

A.小明不是胜就是输,所以小明胜的概率为 $\frac{1}{2}$

B.小明胜的概率是 $\frac{1}{3}$,所以输的概率是 $\frac{2}{3}$

C.两人出相同手势的概率为 $\frac{1}{2}$

D.小明胜的概率和小亮胜的概率一样

【答案】D

【考点】概率

【解析】列表如下：

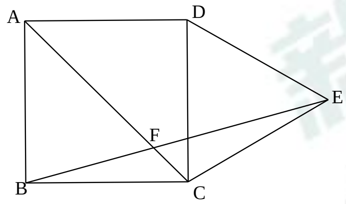
小亮＼小明	剪刀	布	锤子
剪刀	(剪刀，剪刀)	(剪刀，布)	(剪刀，锤子)
布	(布，剪刀)	(布，布)	(布，锤子)
锤子	(锤子，剪刀)	(锤子，布)	(锤子，锤子)

共有 9 种等可能情况，其中：

小明胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ，小明输的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ，两人出相同手势的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

小亮胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ，小亮输的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ，故选 D.

10. 如图,以正方形 ABCD 的边 CD 为边向正方形 ABCD 外作等边△CDE,AC 与 BE 交于点 F,则∠AFE 的度数是（　）



A.135　　B.120°　　C.60°　　D.45°

【答案】B

【考点】正方形相关性质

【解析】∵四边形 ABCD 为正方形，三角形 CDE 为等边三角形，

∴BC=CD=CE，∠BCD=90°，∠DCE=60°，

∴∠BCE=∠BCD+∠DCE=90°+60°=150°

∴在等腰△BCE 中，∠CEF= $\frac{180°-\angle BCE}{2}=\frac{180°-150°}{2}=15°$ ，

∵∠ACD=45°，∴∠FCE=∠ACD+∠DCE=45°+60°=105°，

∴在△CEF 中，∠CFE=180°-∠CEF-∠FCE=180°-15°-105°=60°，

∴∠AFE=180°-∠CFE=180°-60°=120°，故选 B.

二、填空题(本大题共 5 个小题,每小题 3 分,共 15 分)

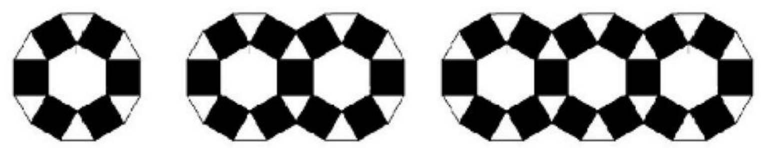
11. 已知点 A,B 的坐标分别为(-2,3)、(1,-2),将线段 AB 平移,得到线段 A′B′,其中点 A 与点 A′对应,点 B 与点 B′对应,若点 A′的坐标为(2,-3),则点 B′的坐标为____________.

【答案】(5,-8)

【考点】图形的平移

【解析】因为将线段 AB 平移到 A′B′，A 点坐标由(-2,3)平移到(2,-3)，即横坐标向右平移 4 个单位，纵坐标向下平移 6 个单位，所以将 B 点坐标向右平移 4 个单位，向下平移 6 个单位得到 B′点的坐标为(5,-8)

12. 如图,自左至右、第 1 个图由 1 个正六边形、6 个正方形和 6 个等边三角形组成;第 2 个图由 2 个正六边形、11 个正方形和 10 个等边三角形组成:第 3 个图由 3 个正六边形、16 个正方形和 14 个等边三角形组成…按照此规律,第 n 个图中等边三角形有__________个(用含 n 的式子表示).



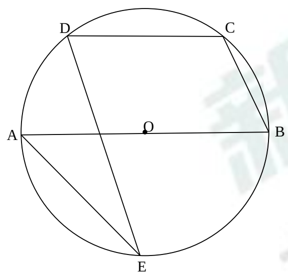
第1个图　　第2个图　　第3个图

【答案】(4n+2)

【考点】图形找规律

【解析】第一个图有 6 个等边三角形，第二个图有 10 个等边三角形，第三个图有 14 个等边三角形，依次增加 4 个，则第 n 个图有(4n+2)个等边三角形

13. 如图,AB 为⊙O 的直径,BC 为⊙O 的弦,点 D 是劣弧 AC 上一点,若点 E 在直径 AB 另一侧的半圆上,且∠AED=27°,则∠BCD 的度数为___________.

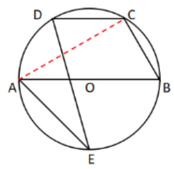


【答案】117°

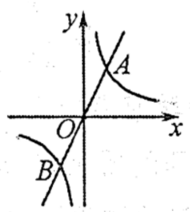
【考点】圆的相关概念和性质

【解析】如图，连接 AC，　∵AB 为⊙O 的直径，∴∠ACB=90°，

∵∠AED=27°，∴∠ACD=27°，　　∴∠BCD=∠ACB+∠ACD=90°+27°=117°



14. 如图,直线 $y=\sqrt{3}x$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 交于 A,B 两点,OA=2,点 C 在 x 轴的正半轴上,若∠ACB=90°,则点 C 的坐标为___________.



【答案】(2，0)

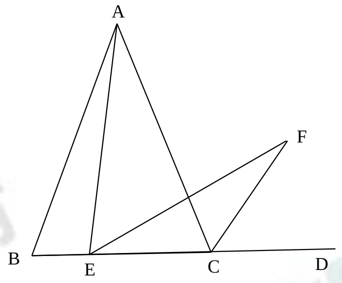
【考点】反比例函数与一次函数的综合

【解析】解：根据已知条件易得：OA=OB=2, ∴ 在△ABC 中，OC 为△ABC 的中线，

∵∠ACB=90°，　∴OC=OA=OB=2（直角三角形中，斜边中线等于斜边一半）

∵点 C 在 x 轴正半轴，∴C（2，0）.

15. 如图,在△ABC 中,AB=AC= $2\sqrt{5}$,BC=4.点 E 为 BC 边上一动点,连接 AE,作∠AEF=∠B,EF 与△ABC 的外角∠ACD 的平分线交于点 F.当 EF⊥AC 时,EF 的长为__________.



【答案】1+ $\sqrt{5}$

【考点】几何综合

【解析】∵AB=AC，∴∠B=∠ACB， ∵∠AEF=∠B， ∴∠AEF=∠ACB，

∵EF⊥AC，∠EOC=90°，∴∠FEC+∠ACB=90°，∠FEC+∠AEF=90°，即∠AEC=90°，

∴易得：△ABE∽△ECO，∴ $\frac{AB}{EC}=\frac{BE}{CO}$，

∵AB=AC=2 $\sqrt{5}$， BC=4， AE⊥BC， ∴BE=CE=2

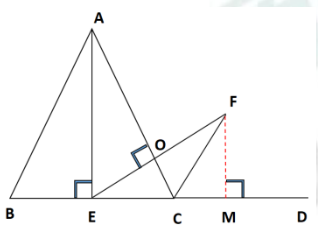
∴ $\frac{2\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{CO}$ ∴CO= $\frac{2\sqrt{5}}{5}$， 在 Rt△CEO 中，EO= $\sqrt{EC^2-OC^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

∵CF 是∠ACD 的角平分线，EF⊥AC,过点 F 做 BD 的垂线，垂足为 M

∴OF=MF， 设 OF=MF=x，∴EF=EO+OF= $\frac{4\sqrt{5}}{5}+x$

∴$S_{\triangle ECF}$= $\frac{1}{2}EC\times MF=\frac{1}{2}EF\times OC$， 即 EC×MF=EF×OC，

∴2x=（ $\frac{4\sqrt{5}}{5}+x$ ）× $\frac{2\sqrt{5}}{5}$， 得 x=1+ $\frac{\sqrt{5}}{5}$， ∴EF=EO+OF= $\frac{4\sqrt{5}}{5}+1+\frac{\sqrt{5}}{5}=1+\sqrt{5}$

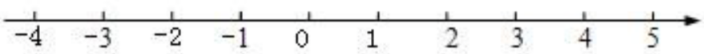


三、简答题（本大题共 8 小题，共 75 分）

16. （本题 10 分）

（1）$(-2)^2+2\sin 45°-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\sqrt{18}$;

（2）解不等式组 $\begin{cases}5x+2>3(x-1)\\ \frac{1}{2}x-1\le 3-\frac{3}{2}x\end{cases}$ 并将其解集在如图所示的数轴上表示出来.



【答案】（1）$4-5\sqrt{2}$　　（2）$-\frac{5}{2}<x\le 2$

【考点】（1）实数的混合运算，特殊角的函数值

（2）解一元一次不等式组；在数轴上表示不等式的解集

【解析】（1）$(-2)^2+2\sin45°-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\sqrt{18}$

$=4+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times3\sqrt{2}$

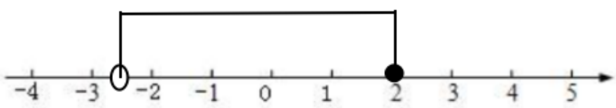
$=4+\sqrt{2}-6\sqrt{2}$

$=4-5\sqrt{2}$

（2）$\begin{cases} 5x+2>3(x-1) & (1) \\ \frac{1}{2}x-1\leq 3-\frac{3}{2}x & (2) \end{cases}$

由①得 $x>-\frac{5}{2}$，由②得 $x\leq 2$，故此不等式得解集为 $-\frac{5}{2}<x\leq 2$.

在数轴上表示为：



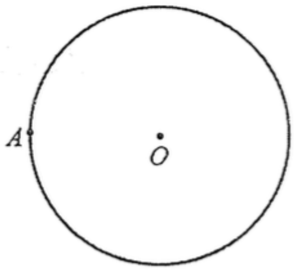
17.（本题8分）

已如:⊙O与⊙O上的一点A

（1）求作: ⊙O的内接正六边形ABCDEF；

（要求:尺规作图,不写作法但保留作图痕迹）

（2）连接CE,BF,判断四边形BCEF是否为矩形,并说明理由



【答案】见解析

【考点】尺规作图；圆内接四边形的有关计算问题

【解析】(1)

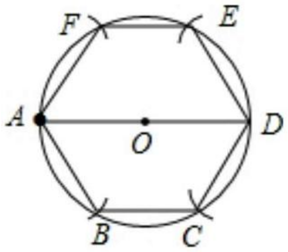


图1

如图正六边形 ABCDEF 即为圆 O 所求.

(2) 如图 2，连接 OE,

∵六边形 ABCDFE 是正六边形，∴AB=AE=DE=DC=FE=BC,

∴$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DC}$, ∴$\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CE}$, ∴BF=CE,∴四边形 BCEF 是平行四边形，

∵∠EOD=$\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$， OE=OD, ∴△EOD 是等边三角形， ∴∠OED=∠ODE=60°

∴∠EDC=∠FED=2∠ODE=120°，∵DE=DC, ∴∠DEC=∠DCE=30°

∴∠CEF=∠DEF-∠CED=90°， ∴四边形 BCEF 是矩形.

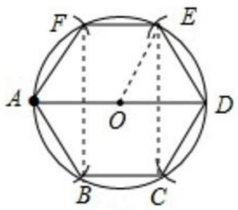


图2

18(本题10分)

某装店用4000元购进一批某品牌的文化衫若干件,很快售完,该店又用6300元钱购进第二批这种文化衫,所进的件数比第一批多40%,每件文化衫的进价比第一批每件文化衫的进价多10元,请解答下列问题：

(1)求购进的第一批文化衫的件数;

(2)为了取信于顾客,在这两批文化衫的销售中,售价保持了一致.若售完这两批文化衫服装店的总利润不少于4100元钱,那么服装店销售该品牌文化衫每件的最低售价是多少元？

【答案】(1)50件;(2)120元

【考点】分式方程的应用，一元一次不等式的应用

【解析】(1)解：设第一批购进文化衫x件.

根据题意可得 $\frac{4000}{x}+10=\frac{6300}{(1+40\%)x}$

解得 x=50

经检验：x=50是原方程的根

答：第一批购进文化衫50件。

(2)解：设该服装店销售该品牌文化衫每件最低售价为y元.

第二批购进文化衫:(1+40%)×50=70(件)

根据题意可得 (50+70)y-4000-6300≥4100

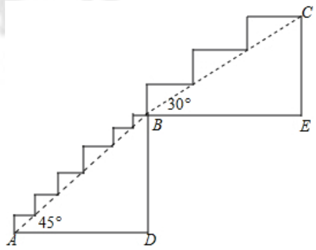
解得 y≥120

答：该服装店销售该品牌文化衫每件最低售价为120元.

19.(本题6分)

如图是某旅游景点的一处台阶,其中台阶坡面AB和BC的长均为6m,AB部分的坡角∠BAD为45°,BC部分的坡角∠CBE为30°,其中BD⊥AD,CE⊥BE,垂足为D,E.现在要将此台阶改造为直接从A至C的台阶,如果改造后每层台阶的高为22cm,那么改造后的台阶有多少层?(最后一个台阶的高超过15cm且不足22cm时,

按一个台阶计算.可能用到的数据：$\sqrt{2}\approx1.414$, $\sqrt{3}\approx1.732$)



【答案】33 个

【考点】解直角三角形的应用—坡度坡角问题

【解析】∵ AB 部分分坡度为 45°，AB=6m，　　∴ BD=3$\sqrt{2}$ m；

∵ BC 部分的坡度为 30°，BC=6m，　　∴ CE=3m，　　∴ BD+CE=3+3$\sqrt{2}$（m）

∵ 每层台阶的高度为 22cm　　∴ 改造后台阶为（3+3$\sqrt{2}$）×100÷22≈33（个）

即改造后台阶为 33 个。

20.(本题10分)

近年来,新能源汽车以其舒适环保、节能经济的优势受到热捧,随之而来的就是新能汽车销量的急速增加,当前市场上新能漂汽车从动力上分纯电动和混合动力两种,从用途上又分为乘用式和商用式两种,据中国汽车工业协会提供的信息,2017年全年新能源乘用车的累计销量为57.9万辆,其中,纯电动乘用车销量为46.8万辆,混合动力乘用车销量为11.1万辆；2017年全年新能源商用车的累计销量为19.8万辆,其中,纯电动商用车销量为18.4万辆,混合动力商用车销量为1.4万辆,请根据以上材料解答下列问题：

(1)请用统计表表示我国2017年新能源汽车各类车型销量情况；

(2)小颖根据上述信息,计算出2017年我国新能源各类车型总销量为77.7万辆,并绘制了“2017年我国新能源汽车四类车型销量比例”的扇形统计图,如图1,请你将该图补充完整(其中的百分数精确到0.1%);

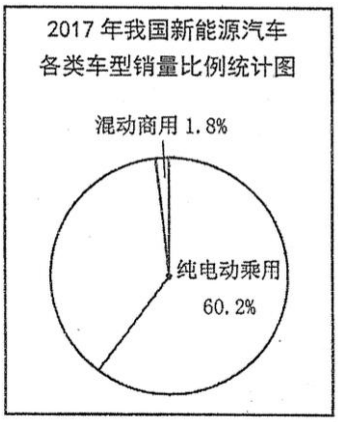


图 1

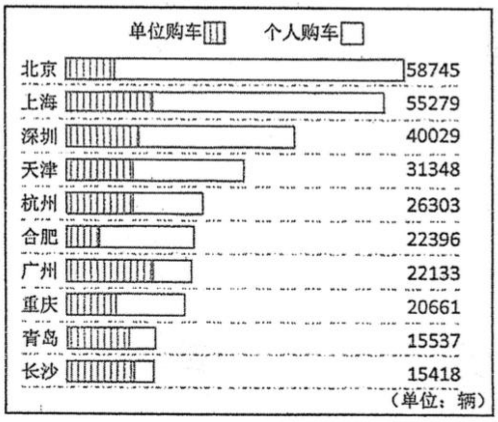


图 2

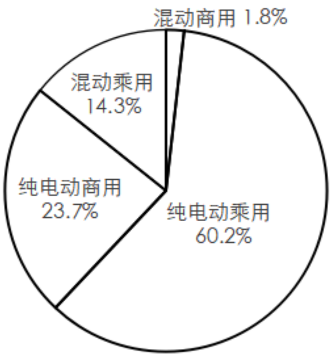
(3)2017年我国新能源乘用车销量最高的十个城市排名情况如图2,请根据图2中信息写出这些城市新能源乘用车销售情况的特点(写出一条即可);

(4)数据显示,2018年1~3月的新能源乘用车总销量排行榜上位居前四的厂家是比亚迪、北汽、上汽、江淮,参加社会实践的大学生小王想对其中两个厂家进行深入调研,他将四个完全相同的乒乓球进行编号(用“1,2,3,4”依次对应上述四个厂家),并将乒乓球放入不透明的袋子中搅匀,从中一次拿出两个乒乓球,根据乒乓球上的编号决定要调研的厂家.求小王恰好调研“比亚迪”和“江淮”这两个厂家的概率.

【答案】(1） 统计表如下所示：

2017 年新能源汽车各类车型销量情况（单位：万辆）			
类型	纯电动	混合动力	总计
新能源乘用车	46.8	11.1	57.9
新能源商用车	18.4	1.4	19.8

（2）如图所示即为所求；



（2）北京的个人购车量最多。答案不唯一，言之有理即可；

（3）P= $\frac{1}{6}$

【考点】统计表，扇形统计图，概率；

【解析】（1）根据题意列出表格即可；

（2) 混动乘用：$\frac{11.1}{77.7}\times100\%\approx14.3\%$ ，14.3%×360°≈51.5°

纯电动商用：$\frac{18.4}{77.7}\times100\%=23.7\%$ ，23.7%×360°≈85.3°

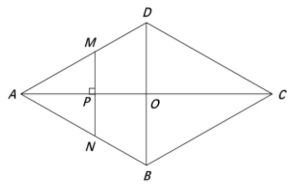
(3) 答案不唯一，合理即可。

（4）根据题意列表：

	1	2	3	4
1		(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)		(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)		(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	

由表可得，共有 12 种等可能情况，其中恰好抽到 1、4 的情况有 2 种，即恰好调研“比亚迪”和“江淮”这两个厂家的概率 P= $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

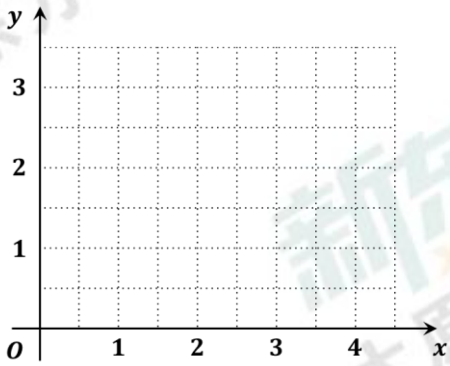
21.（6 分）**问题情境**：课堂上，同学们研究几何变量之间的函数关系问题：如图，菱形 ABCD 的对角线 AC，BD 相交于点 O，AC = 4，BD = 2.点 P 是 AC 上的一个动点，过点 P 作 MN⊥AC，垂足为点 P (点 M 在边 AD、DC 上，点 N 在边 AB、BC 上).设 AP 的长为 $x\ (0 \le x \le 4)$，△AMN 的面积为 y.



建立模型：(1) y 与 x 的函数关系式为：$y=\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & (0 \le x \le 2) \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & (2 < x \le 4) \end{cases}$

解决问题：(2) 为进一步研究 y 随 x 变化的规律，小明想画出此函数的图象.请你补充列表，并在如图的坐标系中画出此函数的图象：

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
y	0	$\frac{1}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{15}{8}$		$\frac{7}{8}$	0



(3) 观察所画的图象，写出该函数的两条性质：________________

____.

【答案】（1）$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, 0\le x\le 2\\ -\frac{1}{2}x^2+2x，2<x\le 4\end{cases}$

（4）y 值依次填入：$\frac{1}{2}$，2,$\frac{3}{2}$，图象见解析

（5）答案不唯一，见解析

【考点】菱形的性质，相似三角形相似比与面积比

【解析】（1）①当 0≤x≤2，MN∥BD，∴△APM∽△AOD，

AP：PM=AO：DO=2:1，AP=x, ∴PM=$\frac{1}{2}$x

∵AC 垂直平分 MN，∴PN=PM=$\frac{1}{2}$x ∴MN=x　　∴S△AMN=$\frac{1}{2}$AP·MN=$\frac{1}{2}$x²

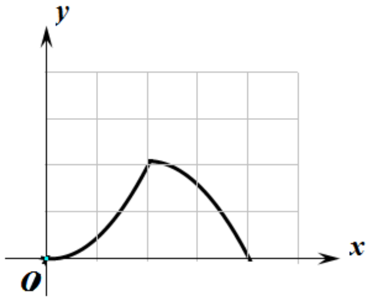
②当 2＜x≤4，点 P 在线段 OC 上。AP=x， CP=4-x

同理得，△CPM∽△COD，　　∴CP：PM=CO：DO=2:1

∴PM=$\frac{1}{2}$（4-x） ∴MN=2PM=4-x　　∴S△AMN=$\frac{1}{2}$AP·MN=$\frac{1}{2}$x(4-x)=$-\frac{1}{2}x^2+2x$

$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, 0\le x\le 2\\ -\frac{1}{2}x^2+2x，2<x\le 4\end{cases}$

（2）由（1）得，y 值分别为：$\frac{1}{2}$，2,$\frac{3}{2}$



（3）答案不唯一，合理即可。性质 1：当 0≤x≤2,函数值随着 x 的增大而增大；性质 2：当 2＜x≤4 时，函数值,随着 x 的增大而减小。

22.（12 分）综合与实践 —— 旋转中的数学

问题背景：在一次综合实践活动课上，同学们以两个矩形为对象，研究相似矩形旋转中的问题：已知矩形 ABCD ∽矩形A'B'C'D'，它们各自对角线的交点重合于点 O，连接 AA'，CC'. 请你帮他们解决下列问题：

观察发现：（1）如图 1，若 A′B′∥AB，则 AA′ 与 CC′ 的数量关系是________________；

操作探究：（2）将图 1 中的矩形 ABCD 保持不动，矩形 A′B′C′D′ 绕点 O 逆时针旋转角度 α (0°＜α≤90°)，如图 2，在矩形 A′B′C′D′ 旋转的过程中，（1）中的结论还成立吗？若成立，请证明；若不成立，请说明理由；

操作计算：（3）如图 3，在（2）的条件下，当矩形 A′B′C′D′ 绕点 O 旋转至 AA′⊥A′D′ 时，若 AB＝6，BC＝8，A′B′＝3，求 AA′ 的长.

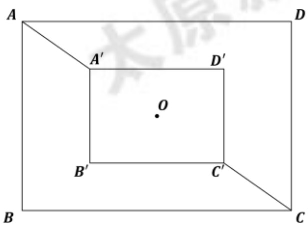


图 1

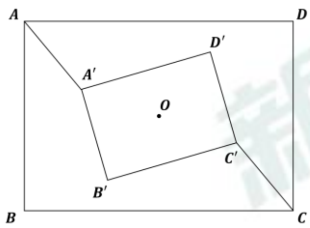


图 2

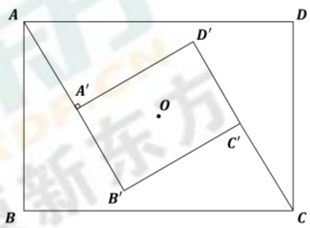


图 3

【答案】（1）AA′=CC′（2）成立，证明见解析 （3）AA′$=\dfrac{2\sqrt{21}-3}{2}$

【考点】矩形的性质，全等三角形，旋转

【解析】（1）证明：连接 AC，A′C′，则 AC 与 A′C′都经过点 O.

∵矩形 ABCD∽矩形 A′B′C′D′ ∴∠CAB=∠C′A′B′

∵AB∥A′B′ ∴点 A、A′、C′、C 共线

由矩形性质知，OA=OC，OA′=OC′， ∴OA-OA′=OC-OC′ ∴AA′=CC′

（2） AA′=CC′成立。

证明：连接 AC，A′C′，则 AC 与 A′C′都经过点 O.

∵矩形 A′B′C′D′绕 O 点逆时针旋转α时， ∴∠A′OA=∠C′OC=α,

∵四边形 ABCD 和四边形 A′B′C′D′是矩形 ∴AO=CO,A′O=C′O

在△AA′O 和△CC′O 中

$\begin{cases} AO=CO \\ \angle A'OA=\angle C'OC \\ A'O=C'O \end{cases}$ ∴△AA′O≌△CC′O(SAS) ∴AA′=CC′

（3）解：连接 AC，过 C 点做 CE⊥AB′，交 AB′的延长线于点 E.

∵矩形 ABCD∽矩形 A′B′C′D′ ∴$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$

∵AB=6，BC=8，A′B′=3 ∴B′C′=4

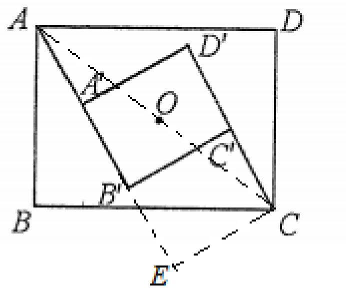
由矩形性质可知 B′C′⊥A′B′，CC′⊥B′C′

∵CE⊥AB′　　∴四边形 B′C′CE 是 矩形　　∴CC′=B′E，B′C′=EC=4

在 Rt△ABC 中，AB=6，BC=8　　∴AC= $\sqrt{6^2+8^2}=10$

在 Rt△AEC 中，CE=4，AC=10　　∴AE= $\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$　　∴AA′+B′E= $2\sqrt{21}$-3

∵AA′=CC′(已证)　　∴AA′=CC′=B′E　　∴AA′ $=\dfrac{2\sqrt{21}-3}{2}$.



23.（13 分）综合与探究

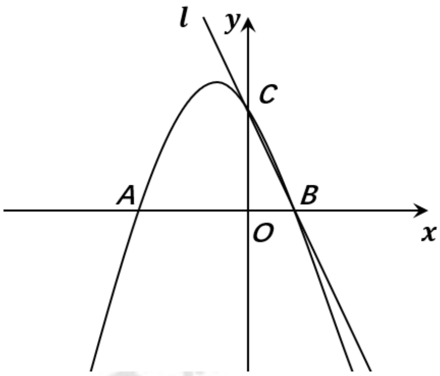
如图，抛物线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 与 x 轴交于A，B 两点(点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C，直线 l 经过 B，C 两点，点 M 从点 A 出发以每秒 1 个单位长度的速度向终点 B 运动，连接 CM，将线段 MC 绕点 M 顺时针旋转90°得到线段 MD，连接 CD，BD. 设点 M 运动的时间为 t (t＞0)，请解答下列问题：

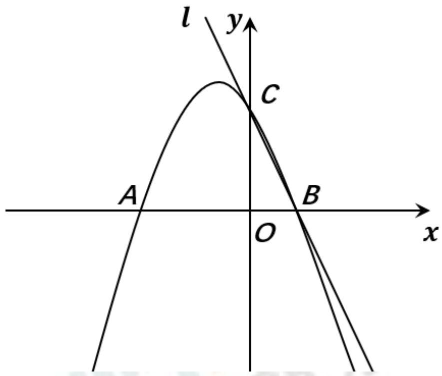
（1）求点 A 的坐标与直线 l 的表达式；

（2）① 直接写出点 D 的坐标(用含 t 的式子表示)，并求点 D 落在直线 l 上时的 t 的值；

② 求点 M 运动的过程中线段 CD 长度的最小值；

（3）在点 M 运动的过程中，在直线 l 上是否存在点 P，使得△BDP 是等边三角形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.





（备用图）

【答案】 （1）A（-3,0）直线 l 解析式：y=-$\sqrt{3}$x+$\sqrt{3}$

（2）D（t-3+$\sqrt{3}$,t-3），t=6-2$\sqrt{3}$,CD 最小值为$\sqrt{6}$

（3）存在，P（2，-$\sqrt{3}$）或 P（$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}-3}{2}$）

【考点】二次函数综合

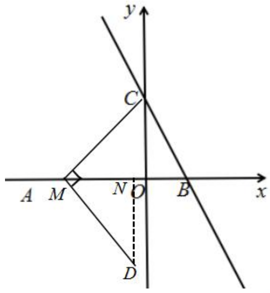
【解析】(1）当 y=0 时，$-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}=0$解得 $x_1=1,x_2=-3$

∵点 A 在点 B 左侧∴A（-3,0）B（1,0）由解析式得 C（0，$\sqrt{3}$）

设直线 l 解析式为 y=kx+b,将 B,C 两点坐标代入得 b=$\sqrt{3}$,k=-$\sqrt{3}$,

故直线 l 解析式：y=-$\sqrt{3}$x+$\sqrt{3}$

（2）当点 M 在 AO 上运动时，如图

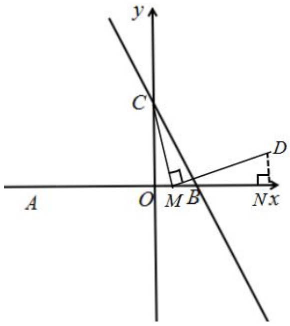


由题知 AM=t,OM=3-t ,MC⊥MD ,MC=MD ,过点 D 作 x 轴的垂线垂足为 N ,则∠DMN+∠CMO=90° ,∠CMO+∠MCO=90°，∴∠MCO=∠DMN

在△MCO 和△DMN 中，$\begin{cases} MD=MC \\ \angle OCM=\angle DMN \\ \angle COM=\angle MND \end{cases}$∴△MCO≌△DMN∴MN=OC=$\sqrt{3}$，DN=OM=3-t

∴D（t-3+$\sqrt{3}$,t-3）

同理当点 M 在 OB 上运动时，如图



OM=t-3,△MCO≌△DMN，MN=OC=$\sqrt{3}$，ON=t-3+$\sqrt{3}$,DN=OM=t-3∴D（t-3+$\sqrt{3}$,t-3）

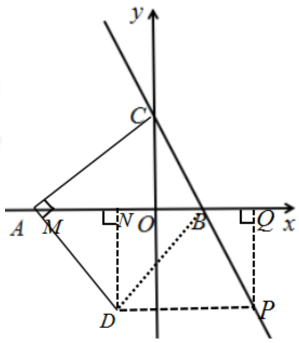
综上得∴D（t-3+$\sqrt{3}$,t-3）将 D 坐标代入直线解析式得 t=6-2$\sqrt{3}$.

由题意，MC=MD,∠CMD=90°，勾股定理得 $CD^2=MC^2+MD^2$,$CD^2=2MC^2$，若 CD 最小，则 CM 最小，

∵C 是直线 AB 外一点，M 在 AB 上运动∴当 CM⊥AB 时，CM 最短，即 CM=CO=$\sqrt{3}$此时 CD 最短，

根据勾股定理得 CD 最小为$\sqrt{6}$.

（3）



当点 M 在 AO 上运动时,即 0<t<3 时

∵tan∠CBO=$\frac{OC}{OB}=\sqrt{3}$，∴∠CBO=60°∵△BDP 是等边三角形∴∠DBP=∠BDP=60°，BD=BP

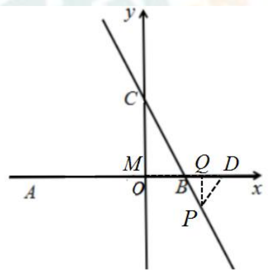
∴∠NBD=60°，DN=3-t,MN=$\sqrt{3}$,AN=t+$\sqrt{3}$,AB=4,NB=4-t-$\sqrt{3}$,tan∠NBD=$\frac{DN}{NB}$

$\frac{3-t}{4-t-\sqrt{3}}=\sqrt{3}$解得 t=3-$\sqrt{3}$,经检验 t=3-$\sqrt{3}$是此方程的解.

过点 P 作 x 轴的垂线，交于点 Q，易知△PQB≌DNB

∴BQ=BN=4-t-$\sqrt{3}$=1,PQ=$\sqrt{3}$,OQ=2，P（2，-$\sqrt{3}$）

当 t=3 的时候，如图



M 与点 O 重合，MD=MC=$\sqrt{3}$，∵OB=1，∴BD=$\sqrt{3}$-1，∠DBP=∠CBO=60°，BD=BP=$\sqrt{3}-1$,过点 P 作 PQ 垂直于 x 轴，PQ=BP·sin∠DBP=$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，BQ=$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

OQ=1+$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$=$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，P（$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}-3}{2}$）

同理当点 M 在 OB 上运动时即 3<t≤4 时∵△BDP 是等边三角形∴∠DBP=∠BDP=60°，BD=BP

∴∠NBD=60°DN=t-3，NB=t-3+$\sqrt{3}$-1=t-4+$\sqrt{3}$,tan∠NBD=$\frac{DN}{NB}$，

$\frac{t-3}{t-4+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,经检验 t=3-$\sqrt{3}$是此方程的解,t=3-$\sqrt{3}$（不符合题意，舍）

故 P（2，-$\sqrt{3}$）或 P（$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}-3}{2}$）