山西省 2018 年初中毕业水平考试试卷解析

数学

第 I 卷 选择题（共 30 分）

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分，在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请选出并在答题卡上将该项涂黑）

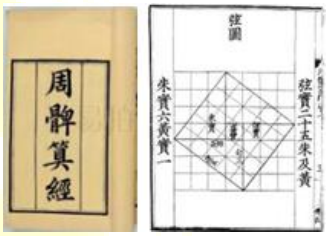
1. 下面有理数比较大小，正确的是（ ）

A. $0<-2$　　B. $-5<3$　　C. $-2<-3$　　D. $1<-4$

【答案】B

【考点】有理数比较大小

2. “算经十书”是指汉唐一千多年间的十部著名数学著作，它们曾经是隋唐时期国子监算学科的教科书，这些流传下来的古算书中凝聚着历代数学家的劳动成果.下列四部著作中，不属于我国古代数学著作的是（ ）



A.《九章算术》　B.《几何原本》　C.《海岛算经》　D.《周髀算经》

【答案】B

【考点】数学文化

【解析】《几何原本》的作者是欧几里得

3. 下列运算正确的是（ ）

A. $\left(-a^3\right)^2=-a^6$　　B. $2a^2+3a^2=6a^2$　　C. $2a^2\cdot a^3=2a^6$　　D. $\left(-\dfrac{b^2}{2a}\right)^3=-\dfrac{b^6}{8a^3}$

【答案】D

【考点】整式运算

【解析】A. $\left(-a^3\right)^2=a^6$　B. $2a^2+3a^2=5a^2$　C. $2a^2\cdot a^3=2a^5$

4. 下列一元二次方程中，没有实数根的是（ ）

A. $x^2-2x=0$　　B. $x^2+4x-1=0$　　C. $2x^2-4x+3=0$　　D. $3x^2=5x-2$

【答案】C

【考点】一元二次方程根的判别式

【解析】$\triangle>0$，有两个不相等的实数根，$\triangle=0$，有两个相等的实数根，$\triangle<0$，没有实数根.

A. $\triangle=4$　　B. $\triangle=20$　　C. $\triangle=-8$　　D. $\triangle=1$

5. 近年来快递业发展迅速，下表是 2018 年 1-3 月份我省部分地市邮政快递业务量的统计结果（单位：万件）

太原市	大同市	长治市	晋中市	运城市	临汾市	吕梁市
3303.78	332.68	302.34	319.79	725.86	416.01	338.87

1-3 月份我省这七个地市邮政快递业务量的中位数是（）

A.319.79 万件　　B. 332.68 万件　　C. 338.87 万件　　D. 416.01 万件

【答案】C

【考点】数据的分析

【解析】将表格中七个数据从小到大排列，第四个数据为中位数，即 338.87 万件.

6. 黄河是中华民族的象征，被誉为母亲河，黄河壶口瀑布位于我省吉县城西 45 千米处，是黄河上最具气势的自然景观，其落差约 30 米，年平均流量 1010 立方米/秒. 若以小时作时间单位，则其年平均流量可用科学计数法表示为

A. 6.06×10^4 立方米/时　　B. 3.136×10^6 立方米/时

C. 3.636×10^6 立方米/时　　D. 36.36×10^5 立方米/时

【答案】C

【考点】科学计数法

【解析】一秒为 1010 立方米，则一小时为 1010×60×60=3636000 立方米，3636000 用科学计数法表示为 3.636×10^6.

7. 在一个不透明的袋子里装有两个黄球和一个白球，它们除颜色外都相同，随机从中摸出一个球，记下颜色后放回袋子中，充分摇匀后，再随机摸出一个球，两次都摸到黄球的概率是（）

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{1}{9}$

【答案】A

【考点】树状图或列表法求概率

【解析】

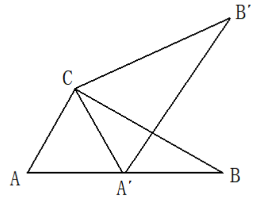
第一次 / 第二次	黄 1	黄 2	白
黄 1	（黄 1，黄 1）	（黄 1，黄 2）	（黄 1，白）
黄 2	（黄 2，黄 1）	（黄 2，黄 2）	（黄 2，白）
白	（白，黄 1）	（白，黄 2）	（白，白）

由表格可知，共有 9 种等可能结果，其中两次都摸到黄球的结果有 4 种，

∴P（两次都摸到黄球）$=\frac{4}{9}$.

8. 如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，∠A=60°，AC=6，将△ABC 绕点 C 按逆时针方向旋转得到△A’B’C，此时点 A’恰好在 AB 边上，则点 B’与点 B 之间的距离是（）

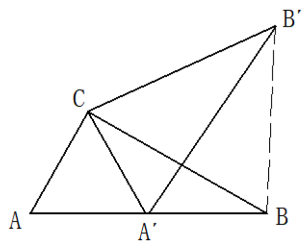
A. 12　　B. 6　　C. $6\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{3}$



（第8题）

【答案】D
【考点】旋转，等边三角形性质
【解析】连接 BB’，由旋转可知 AC=A’C，BC=B’C，∵∠A=60°，∴△ACA’为等边三角形，

∴∠ACA’=60°，∴∠BCB’=60°∴△BCB’为等边三角形，∴BB’=BC=$6\sqrt{3}$.



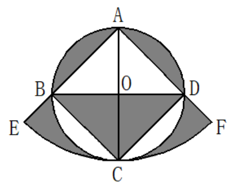
9．用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为（）

A．$y=(x-4)^2+7$　　B．$y=(x-4)^2-25$　　C．$y=(x+4)^2+7$　　D．$y=(x+4)^2-25$

【答案】B
【考点】二次函数的顶点式

【解析】$y=x^2-8x-9=x^2-8x+16-16-9=(x-4)^2-25$

10．如图，正方形 ABCD 内接于⊙O，⊙O 的半径为 2，以点 A 为圆心，以 AC 为半径画弧交 AB 的延长线于点 E，交 AD 的延长线于点 F，则图中阴影部分的面积是（　　）
A．4π-4　　B．4π-8　　C．8π-4　　D．8π-8



（第10题）

【答案】A
【考点】扇形面积，正方形性质
【解析】∵四边形 ABCD 为正方形，∴∠BAD=90°，可知圆和正方形是中心对称图形，

所以 $S_{阴影}=S_{扇AEF}-S_{\triangle ABD}==\frac{90\pi\cdot 4^2}{360}-\frac{AO\cdot BD}{2}=\frac{90\pi\cdot 4^2}{360}-\frac{2\times 4}{2}=4\pi-4$

第Ⅰ卷　非选择题（共 90 分）

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

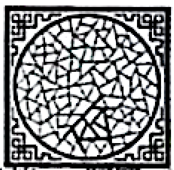
11. 计算：$(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)=$____.

【答案】17

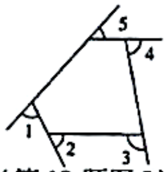
【考点】平方差公式

【解析】$\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \therefore (3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)=(3\sqrt{2})^2-1^2=17$

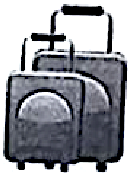
12. 图 1 是我国古代建筑中的一种窗格. 其中冰裂纹图案象征着坚冰出现裂纹并开始清溶，形状无一定规则，代表一种自然和谐美. 图 2 是从图 1 冰裂纹窗格图案中提取的由五条线段组成的图形，则 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=$__度.



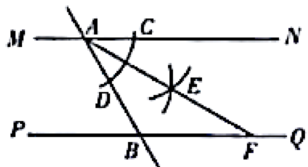
（第 12 题图 1）



（第 12 题图 2）



（第 13 题）



（第 14 题）

【答案】360

【考点】多边形外角和

【解析】∵任意 n 边形的外角和为 360°，图中五条线段组成五边形

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=360°$.

13. 2018 年国内航空公司规定：旅客乘机时，免费携带行李箱的长、宽、高之和不超过 115cm. 某厂家生产符合该规定的行李箱，已知行李箱的宽为 20cm，长与高的比为 8:11，则符合此规定的行李箱的高的最大值为_____cm.

【答案】55

【考点】一元一次不等式的实际应用

【解析】解：设行李箱的长为 8xcm，宽为 11xcm

$20+8x+11x\le 115$

解得 $x\le 5$

$\therefore$ 高的最大值为 $11\times 5=55$cm

14. 如图，直线 MN∥PQ，直线 AB 分别与 MN，PQ 相交于点 A，B. 小宇同学利用尺规按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，以任意长为半径作弧交 AN 于点 C，交 AB 于点 D；②分别以 C，D 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}$CD 长为半径作弧，两弧在∠NAB 内交于点 E；③作射线 AE 交 PQ 于点 F. 若 AB=2，∠ABP=60^0，则线段 AF 的长为______.

【答案】$2\sqrt{3}$

【考点】角平分线尺规作图，平行线性质，等腰三角形三线合一

【解析】过点 B 作 BG⊥AF 交 AF 于点 G

由尺规作图可知，AF 平分∠NAB

∴∠NAF=∠BAF

∵MN∥PQ

∴∠NAF=∠BFA

∴∠BAF=∠BFA

∴ BA=BF=2

∵ BG⊥AF

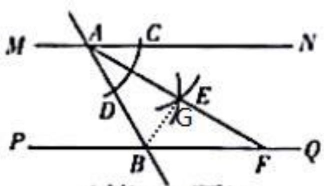
∴ AG=FG

∵ ∠ABP=60°

∴ ∠BAF=∠BFA=30°

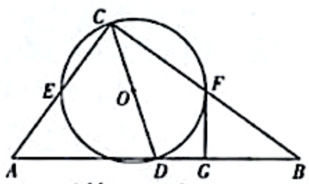
Rt△BFG 中， $FG=BF\cdot\cos\angle BFA=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

∴ $AF=2FG=2\sqrt{3}$



（第 14 题）

15．如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=6，BC=8，点 D 是 AB 的中点，以 CD 为直径作⊙O，⊙O 分别与 AC，BC 交于点 E，F，过点 F 作⊙O 的切线 FG，交 AB 于点 G，则 FG 的长为_____.



（第 15 题）

【答案】 $\frac{12}{5}$

【考点】直角三角形斜中线，切线性质，平行线分线段成比例，三角函数

【解析】连接 OF

∵ FG 为⊙O 的切线 ∴ OF⊥FG

∵ Rt△ABC 中，D 为 AB 中点

∴ CD=BD

∴ ∠DCB=∠B

∵ OC=OF

∴ ∠OCF=∠OFC

∴ ∠CFO=∠B

∴ OF∥BD

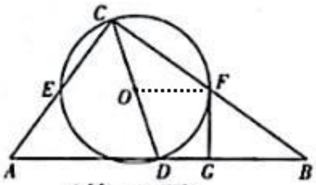
∵ O 为 CD 中点

∴ F 为 BC 中点

∴ $CF=BF=\frac{1}{2}BC=4$

Rt△ABC 中， $\sin\angle B=\frac{3}{5}$

Rt△BGF 中， $FG=BF\sin\angle B=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$



（第 15 题）

三、解答题（本大题共 8 个小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.（本题共 2 个小题，每小题 5 分，共 10 分）

计算：（1）$(2\sqrt{2})^2-|-4|+3^{-1}\times6+2^0$

【考点】实数的计算

【解析】解：原式=8-4+2+1

=7

（2）$\frac{x-2}{x-1}\bullet\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}-\frac{1}{x-2}$

【考点】分式化简

【解析】解：原式 $=\frac{x-2}{x-1}\bullet\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}-\frac{1}{x-2}$

$=\frac{x+1}{x-2}-\frac{1}{x-2}$

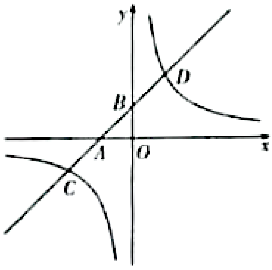
$=\frac{x}{x-2}$

17.（本题 8 分）如图，一次函数 $y_1=k_1x+b(k_1\neq0)$ 的图象分别与 x 轴，y 轴相交于点 A，B，与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}(k_2\neq0)$ 的图象相交于点 C（-4，-2），D（2，4）.

（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）当 x 为何值时，$y_1>0$；

（3）当 x 为何值时，$y_1<y_2$，请直接写出 x 的取值范围.



【考点】反比例函数与一次函数

【解析】

（1）解：∵一次函数 $y_1=k_1x+b$ 的图象经过点 C（-4，-2），D（2，4），

$$\therefore \begin{cases} -4k_1+b=-2, \\ 2k_1+b=4. \end{cases}$$

解，得 $\begin{cases} k_1=1, \\ b=2. \end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y_1=x+2$.

∵反比例函数 $y_2=\dfrac{k_2}{x}$ 的图象经过点 D（2，4），∴ $4=\dfrac{k_2}{2}$. ∴ $k_2=8$.

∴反比例函数的表达式为 $y_2=\dfrac{8}{x}$.

（2）解：由 $y_1>0$，得 $x+2>0$.

∴ $x>-2$. ∴当 $x>-2$ 时，$y_1>0$.

（3）解：$x<-4$ 或 $0<x<2$.

18.（本题 9 分）在“优秀传统文化进校园”活动中，学校计划每周二下午第三节课时间开展此项活动，拟开展活动项目为：剪纸，武术，书法，器乐，要求七年级学生人人参加，并且每人只能参加其中一项活动. 教务处在该校七年级学生中随机抽取了 100 名学生进行调查，并对此进行统计，绘制了如图所示的条形统计图和扇形统计图（均不完整）.

请解答下列问题：

（1）请补全条形统计图和扇形统计图；

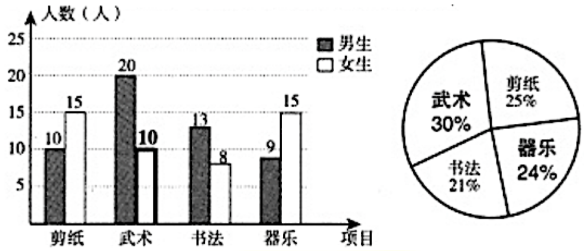
（2）在参加“剪纸”活动项目的学生中，男生所占的百分比是多少？

（3）若该校七年级学生共有 500 人，请估计其中参加“书法”项目活动的有多少人？

（4）学校教务处要从这些被调查的女生中，随机抽取一人了解具体情况，那么正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率是多少？

【考点】条形统计图，扇形统计图

【解析】（1）解：



（2）解：$\dfrac{10}{10+15}\times 100\% = 40\%.$

答：男生所占的百分比为 40%.

（3）解：500×21%=105（人）.

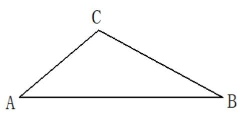
答：估计其中参加“书法”项目活动的有 105 人.

（4）解：$\dfrac{15}{15+10+8+15}=\dfrac{15}{48}=\dfrac{5}{16}$

答：正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率为 $\dfrac{5}{16}$.

19.(本题 8 分)祥云桥位于省城太原南部，该桥塔主体由三根曲线塔柱组合而成，全桥共设 13 对直线型斜拉索，造型新颖，是“三晋大地”的一种象征.某数学“综合与实践”小组的同学把“测量斜拉索顶端到桥面的距离”作为一项课题活动，他们制订了测量方案，并利用课余时间借助该桥斜拉索完成了实地测量.

测量结果如下表.

项目	内容		
课题	测量斜拉索顶端到桥面的距离		
测量示意图		说明：两侧最长斜拉索 AC，BC 相交于点 C，分别与桥面交于 A，B 两点，且点 A，B，C 在同一竖直平面内.	
测量数据	∠A 的度数	∠B 的度数	AB 的长度
	38°	28°	234 米

...	...

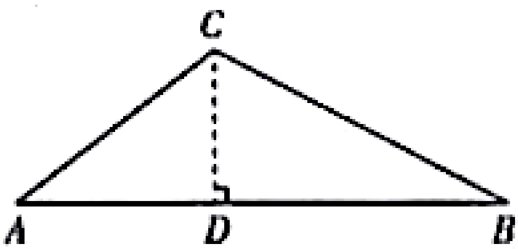
(1) 请帮助该小组根据上表中的测量数据，求斜拉索顶端点C到AB的距离(参考数据 $\sin 38^\circ \approx 0.6$，$\cos 38^\circ \approx 0.8$，$\tan 38^\circ \approx 0.8$，$\sin 28^\circ \approx 0.5$，$\cos 28^\circ \approx 0.9$，$\tan 28^\circ \approx 0.5$）；

(2) 该小组要写出一份完整的课题活动报告，除上表的项目外，你认为还需要补充哪些项目（写出一个即可）.

【考点】三角函数的应用

【解析】

（1）解：过点 C 作 CD⊥AB 于点 D.



设 CD= x 米，在 RtΔADC 中，

∠ADC=90°，∠A=38°.

$\because \tan 38^\circ = \dfrac{CD}{AD}$，　$\therefore AD = \dfrac{CD}{\tan 38^\circ} = \dfrac{x}{0.8} = \dfrac{5}{4}x$.

在 RtΔBDC 中，∠BDC=90°，∠B=28°.

$\because \tan 28^\circ = \dfrac{CD}{BD}$，$\therefore BD = \dfrac{CD}{\tan 28^\circ} = \dfrac{x}{0.5} = 2x$.

$\because AD + BD = AB = 234$.　$\therefore \dfrac{5}{4}x + 2x = 234$.

解得 $x = 72$.

答：斜拉索顶端点 C 到 AB 的距离为 72 米.

（2）解：答案不唯一，还需要补充的项目可为：测量工具，计算过程，人员分工，指导教师，活动感受等.

20.(本题 7 分)2018 年 1 月 20 日，山西迎来了“复兴号”列车，与“和谐号”相比，“复兴号”列车时速更快，安全性更好. 已知“太原南-北京西”全程大约 500 千米，“复兴号”G92 次列车平均每小时比某列“和谐号”列车多行驶 40 千米，其行驶时间是该列“和谐号”列车行驶时间的 $\dfrac{4}{5}$（两列车中途停留时间均除外）. 经查询，“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西，中途只有石家庄一站，停留 10 分钟. 求乘坐“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西需要多长时间.

【考点】分式方程应用

【解析】

解法一：设乘坐“复兴号” G92 次列车从太原南到北京西需要 x 小时，

由题意，得 $\dfrac{500}{x-\dfrac{1}{6}} = \dfrac{500}{\dfrac{5}{4}(x-\dfrac{1}{6})} + 40$.

解得 $x = \dfrac{8}{3}$.

经检验，$x=\dfrac{8}{3}$是原方程的根.

答：乘坐“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西需要$\dfrac{8}{3}$小时.

解法二：设“复兴号” G92 次列车从太原南到北京西的行驶时间需要x小时，

由题意，得$\dfrac{500}{x}=\dfrac{500}{\frac{5}{4}x}+40$

解得$x=\dfrac{5}{2}$.

经检验，$x=\dfrac{5}{2}$是原方程的根.

$\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{8}{3}$（小时）.

答：乘坐“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西需要$\dfrac{8}{3}$小时.

21.（本题 8 分）请阅读下列材料，并完成相应的任务：

在数学中，利用图形在变化过程中的不变性质，常常可以找到解决问题的办法.著名美籍匈牙利数学家波利亚在他所著的《数学的发现》一书中有这样一个例子：试问如何在一个三角形 ABC 的 AC 和 BC 两边上分别取一点 X 和 Y，使得 AX=BY=XY.（如图）解决这个问题的操作步骤如下：

第一步，在 CA 上作出一点 D，使得 CD=CB，连接 BD.第二步，在 CB 上取一点 Y’，作 Y’Z’//CA，交 BD 于点 Z’，并在 AB 上取一点 A’，使 Z’A’=Y’Z’.第三步，过点 A 作 AZ//A’Z’，交 BD 于点 Z.第四步，过点 Z 作 ZY//AC，交 BC 于点 Y，再过 Y 作 YX//ZA，交 AC 于点 X.

则有 AX=BY=XY.

下面是该结论的部分证明：

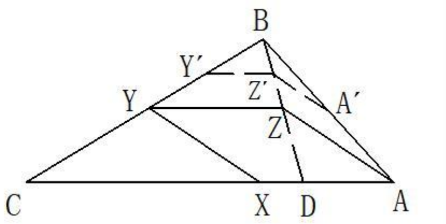
证明：$\because AZ//A'Z \therefore \angle BA'Z'=\angle BAZ$

又$\because \angle A'BZ'=\angle ABZ$. $\therefore \triangle BA'Z\sim\triangle BAZ$

$\therefore \dfrac{Z'A'}{ZA}=\dfrac{BZ'}{BZ}$.

同理可得$\dfrac{Y'Z'}{YZ}=\dfrac{BZ'}{BZ}$. $\therefore \dfrac{Z'A'}{ZA}=\dfrac{Y'Z'}{YZ}$.

$\because Z'A'=Y'Z'$, $\therefore ZA=YZ$.   . . .



（第21题）

任务：

（1）请根据上面的操作步骤及部分证明过程，判断四边形 AXYZ 的形状，并加以证明；

（2）请再仔细阅读上面的操作步骤，在（1）的基础上完成 AX=BY=XY 的证明过程；

（3）上述解决问题的过程中，通过作平行线把四边形 BA’Z’Y’放大得到四边形 BAZY，从而确定了点 Z，Y 的位置，这里运用了下面一种图形的变化是______.

A.平移　　B.旋转　　C.轴对称　　D.位似

【考点】菱形的性质与判定，图形的位似

【解析】

（1）答：四边形 AXYZ 是菱形.

证明：$\because ZY//AC,\ YX//ZA$，∴四边形 AXYZ 是平行四边形.

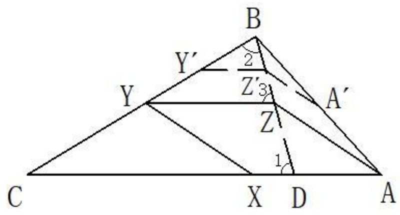
$\because ZA=YZ$，∴ ▱$AXYZ$ 是菱形.

（2）答：证明：$\because CD=CB$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because ZY//AC$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$. $\therefore YB=YZ$.

∵四边形 AXYZ 是菱形，∴AX=XY=YZ.
∴AX=BY=XY.



(3)上述解决问题的过程中，通过作平行线把四边形 BA’Z’Y’放大得到四边形 BAZY，从而确定了点 Z，Y 的位置，这里运用了下面一种图形的变化是 D（或位似）.

A.平移　　B.旋转　　C.轴对称　　D.位似

22.(本题 12 分)**综合与实践**

问题情境：在数学活动课上，老师出示了这样一个问题：如图 1，在矩形 ABCD 中，AD=2AB，E 是 AB 延长线上一点，且 BE=AB，连接 DE，交 BC 于点 M，以 DE 为一边在 DE 的左下方作正方形 DEFG，连接 AM．试判断线段 AM 与 DE 的位置关系．

探究展示：勤奋小组发现，AM 垂直平分 DE，并展示了如下的证明方法：

证明：$\because BE=AB$，$\therefore AE=2AB$

$\because AD=2AB,\quad \therefore AD=AE$

∵四边形 ABCD 是矩形，$\therefore AD//BC.$

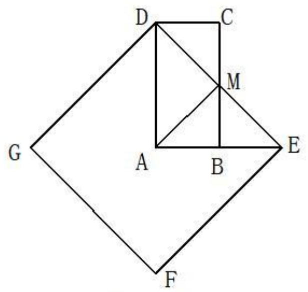
$\therefore \dfrac{EM}{DM}=\dfrac{EB}{AB}.$　（**依据 1**）

$\because BE=AB,\ \therefore \dfrac{EM}{DM}=1.\ \therefore EM=DM.$

即 AM 是△ADE 的 DE 边上的中线，

又 $\because AD=AE,\ \therefore AM\perp DE.$　（**依据 2**）

∴AM 垂直平分 DE.



（第22题图1）

反思交流：

(1)①上述证明过程中的“依据 1”“依据 2”分别是指什么？

②试判断图 1 中的点 A 是否在线段 GF 的垂直平分上，请直接回答，不必证明；

(2)创新小组受到勤奋小组的启发，继续进行探究，如图 2，连接 CE，以 CE 为一边在 CE 的左下方作正方形 CEFG，发现点 G 在线段 BC 的垂直平分线上，请你给出证明；

探索发现：

(3)如图 3，连接 CE，以 CE 为一边在 CE 的右上方作正方形 CEFG，可以发现点 C，点 B 都在线段 AE 的垂直平分线上，除此之外，请观察矩形 ABCD 和正方形 CEFG 的顶点与边，你还能发现哪个顶点在哪条边的垂直平分线上，请写出一个你发现的结论，并加以证明.

【考点】平行线分线段成比例，三线合一，正方形、矩形性质，全等

【解析】

(1) 答：①依据 1：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例（或平行线分线段成比例）.

依据 2：等腰三角形顶角的平分线，底边上的中线及底边上的高互相重合（或等腰三角形的“三线合一”）.

②答：点 A 在线段 GF 的垂直平分线上.

(2) 证明：过点 G 作 GH⊥BC 于点 H，

∵四边形 ABCD 是矩形，点 E 在 AB 的延长线上，

$\therefore \angle CBE=\angle ABC=\angle GHC=90°.\ \therefore \angle 1+\angle 2=90°.$

∵四边形 CEFG 为正方形，

$\therefore CG=CE,\angle GCE=90°.\ \angle 1+\angle 3=90°.\ \therefore \angle 2=\angle 3.$

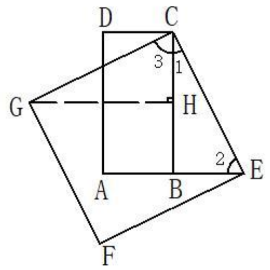
$\therefore \triangle GHC\sim\triangle CBE.$

$\therefore HC=BE.$

∵四边形 ABCD 是矩形，$\therefore AD=BC.$

$\because AD=2AB, BE=AB,\ \therefore BC=2BE=2HC.\ \ \therefore HC=BH.$

∴GH 垂直平分 BC. ∴点 G 在 BC 的垂直平分线上.



（第22题图2）

（3）答：点 F 在 BC 边的垂直平分线上（或点 F 在 AD 边的垂直平分线上）.

证法一： 过点 F 作 FM⊥BC 于点 M，过点 E 作 EN⊥FM 于点 N.

$\therefore \angle BMN = \angle ENM = \angle ENF = 90°.$

∵四边形 ABCD 是矩形，点 E 在 AB 的延长线上，

$\therefore \angle CBE = \angle ABC = 90°.$ ∴四边形 BENM 为矩形.

$\therefore BM = EN, \angle BEN = 90°.\ \therefore \angle 1 + \angle 2 = 90°.$

∵四边形 CEFG 为正方形，

$\therefore EF = EC, \angle CEF = 90°.\ \therefore \angle 2 + \angle 3 = 90°.$

$\therefore \angle 1 = \angle 3.\ \because \angle CBE = \angle ENF = 90°,$

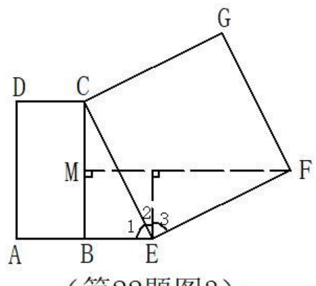
$\therefore \triangle ENF \cong \triangle EBC.$

$\therefore NE = BE.\ \therefore BM = BE.$

∵四边形 ABCD 是矩形，$\therefore AD = BC.$

$\because AD = 2AB, AB = BE.\ \therefore BC = 2BM.\ \therefore BM = MC.$

∴FM 垂直平分 BC，∴点 F 在 BC 边的垂直平分线上.



（第22题图3）

证法二： 过 F 作 FN⊥BE 交 BE 的延长线于点 N，连接 FB，FC.

∵四边形 ABCD 是矩形，点 E 在 AB 的延长线上，

∴∠CBE=∠ABC=∠N=90°． ∴∠1+∠3=90°．

∵四边形 CEFG 为正方形，∴EC=EF，∠CEF=90°．

∴∠1+∠2=90°． ∴∠2=∠3.

∴△ENF≅△CBE.

∴NF=BE，NE=BC.

∵四边形 ABCD 是矩形，∴AD=BC.

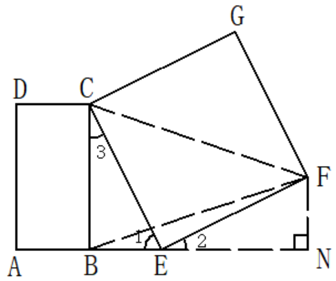
∵AD=2AB，BE=AB． ∴设 BE=a，则 BC=EN=2a，NF=a.

$\therefore BF=\sqrt{BN^2+FN^2}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$.

$CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$.

$CF=\sqrt{CE^2+EF^2}=\sqrt{2}CE=\sqrt{10}a$.

∴BF=CF. ∴点 F 在 BC 边的垂直平分线上.



(第22题图3)

23.(本题 13 分)**综合与探究**

如图，抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-4$ 与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，连接 AC，BC. 点 P 是第四象限内抛物线上的一个动点，点 P 的横坐标为 m，过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为点 M， PM 交 BC 于点 Q，过点 P 作 $PE\parallel AC$ 交 x 轴于点 E，交 BC 于点 F.

（1）求 A， B， C 三点的坐标；

（2）试探究在点 P 的运动的过程中，是否存在这样的点 Q，使得以 A， C， Q 为顶点的三角形是等腰三角形. 若存在，请直接写出此时点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）请用含 m 的代数式表示线段 QF 的长，并求出 m 为何值时 QF 有最大值.

【考点】几何与二次函数综合

【解析】

（1）解：由 $y=0$，得 $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-4=0$.

解得 $x_1=-3$， $x_2=4$.

∴ 点 A， B 的坐标分别为 A(-3,0)，B（4，0）

由 $x=0$，得 $y=-4$. ∴ 点 C 的坐标为 C（0，-4）.

（2）答： $Q_1(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}-4)$， $Q_2(1,-3)$.

（3）过点 F 作 $FG\perp PQ$ 于点 G.

则 $FG\parallel x$ 轴. 由 B（4，0），C（0，-4），得 $\triangle OBC$ 为等腰直角三角形.

$\therefore \angle OBC=\angle QFG=45°$. $\therefore GQ=FG=\frac{\sqrt{2}}{2}FQ$.

$\because PE\parallel AC$， $\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because FG\parallel x$ 轴， $\therefore \angle 2=\angle 3$. $\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\because \angle FGP=\angle AOC=90°$， $\therefore \triangle FGP\backsim\triangle AOC$.

$\therefore \dfrac{FG}{AO}=\dfrac{GP}{OC}$，即 $\dfrac{FG}{3}=\dfrac{GP}{4}$.

$\therefore GP=\dfrac{4}{3}FG=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}FQ=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}FQ$.

$\therefore QP=GQ+GP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}FQ+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}FQ=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}FQ$.

$\therefore FQ=\dfrac{3\sqrt{2}}{7}QP$.

$\because PM\perp x$ 轴， 点 P 的横坐标为 m， $\angle MBQ=45°$，

$\therefore QM=MB=4-m$， $PM=-\dfrac{1}{3}m^2+\dfrac{1}{3}m+4$.

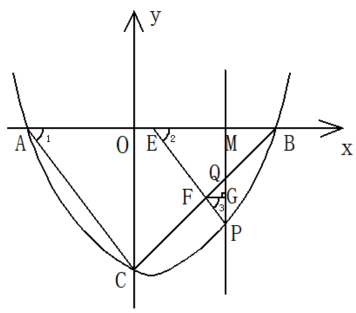
$\therefore QP=PM-QM=-\dfrac{1}{3}m^2+\dfrac{1}{3}m+4-(4-m)=-\dfrac{1}{3}m^2+\dfrac{4}{3}m$.

$\therefore QF=\dfrac{3\sqrt{2}}{7}QP=\dfrac{3\sqrt{2}}{7}(-\dfrac{1}{3}m^2+\dfrac{4}{3}m)=-\dfrac{\sqrt{2}}{7}m^2+\dfrac{4\sqrt{2}}{7}m$.

$\because -\dfrac{\sqrt{2}}{7}<0$，

$\therefore QF$ 有最大值.

$\therefore$ 当 $m=-\dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{7}}{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{7}\right)}=2$ 时， QF 有最大值.



（第23题图）