2017-2018 学年第二学期高一年级期末试卷分析

一、选择题。本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,q=2$，则$a_4=$

$A.\ 6\quad B.\ 7\quad C.\ 8\quad D.\ 9$

考点：等比数列的通项公式
答案：C
解析：等比数列的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$，所以$a_4=1\times2^{4-1}=8$

2. 不等式$x(x-1)<0$的解集是

$A.\ (-\infty,0)\cup(1,+\infty)\quad B.\ (0,1)\quad C.\ (-\infty,0)\quad D.\ (1,+\infty)$

考点：一元二次不等式
答案：B
解析：不等式$x(x-1)<0$的解集为$(0,1)$

3. 在ΔABC中，$a=\sqrt{3},A=60°,B=45°$，则$b=$

$A.\ \sqrt{2}\quad B.\ 2\quad C.\ \sqrt{6}\quad D.\ 2\sqrt{3}$

考点：正弦定理
答案：A
解析：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$b=\sqrt{2}$

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=a_n+2(n\in N^*)$，则数列$\{a_n\}$的前 5 项和$S_5=$

$A.\ 9\quad B.\ 16\quad C.\ 25\quad D.\ 36$

考点：等差数列的前n项和
答案：C
解析：$a_n=1+2(n-1)=2n-1$，所以$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=25$

5. 已知实数$a>b$，则下列结论正确的是

$A.\ \frac{a}{b}>1\quad B.\ a^2>b^2\quad C.\ \frac{a}{b}<1\quad D.\ 2^a>2^b$

考点：不等式的性质
答案：D
解析：$\because a>b,\ \therefore 2^a>2^b$

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_3+a_5=9, a_4+a_5+a_6=21$, 则 $a_7=$

$A.9$ $B.11$ $C.13$ $D.15$

考点：等差数列	
答案：B	
解析：由 $a_1+a_3+a_5=9$ 得 $a_3=3$，$\therefore a_4+a_5+a_6=3a_3+6d=21, \therefore d=2$，$a_7=a_3+4d=11$	

7. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2<0\}, B=\{x|x(x-m)>0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 m 的取值范围是

$A.(-\infty,0]$ $B.[0,2]$ $C.[2,+\infty)$ $D.[0,1]$

考点：一元二次不等式	
答案：C	
解析：$x^2-3x+2<0$ 的解集为 $(1,2)$，$x(x-m)>0$ 的解集为 $(-\infty,0)\cup(m,+\infty)$ 或 $(-\infty,m)\cup(0,+\infty)$，由于 $A\cap B=\varnothing$，所以 $m\ge 2$	

8. 在 ΔABC 中，$A=45^\circ, a=\sqrt{3}, b=2$, 则 $c=$

$A.\ 2\sqrt{2}$ $B.\ \sqrt{2}-1$ 或 $2\sqrt{2}$ $C.\ \sqrt{2}+1$ $D.\ \sqrt{2}+1$ 或 $\sqrt{2}-1$

考点：余弦定理	
答案：D	
解析：由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $c=\sqrt{2}\pm 1$	

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_3=12, S_5=30$，则数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和是

$A.\ \frac{n}{n+1}$ $B.\ \frac{2n}{n+1}$ $C.\ \frac{n}{n+2}$ $D.\ \frac{2n}{n+2}$

考点：等差数列通项公式，裂项相消法求和	
答案：A	
解析：由 $S_3=12, S_5=30$ 得 $a_1=2, d=2$，所以 $S_n=n(n+1)$，所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以由裂项相消法得数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n}{n+1}$	

10. 已知实数 $m>0, n>0$，且 $m+n=2$，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为

$A.\ 4$ $B.2$ $C.\ 4\sqrt{2}$ $D.\ 2\sqrt{2}$

考点：基本不等式	
答案：B	
解析：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\times\frac{m+n}{2}=1+\frac{n}{2m}+\frac{m}{2n}\ge 1+2\sqrt{\frac{n}{2m}\times\frac{m}{2n}}=2$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立	

11.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}-a_n=2^n+n,n\in N^*$，则$a_{10}=$（ ）

$A.557$　　$B.567$　　$C.1069$　　$D.1079$

考点：构造法求数列通项
答案：C
解析：$\begin{aligned}&a_{10}-a_9=2^9+9\\&a_9-a_8=2^8+8\\&a_8-a_7=2^7+7\\&\vdots\\&a_2-a_1=2^1+1\end{aligned}$ 叠加得：$a_{10}-a_1=\frac{2(1-2^9)}{1-2}+45=1067,\because a_1=2,\therefore a_{10}=1069$

12.在ΔABC中，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，点$D$在边$AC$上，且$BD\perp AB$，若$BC=3\sqrt{2},CD=\sqrt{3}$，则$\Delta ABC$的面积为（ ）

$A.6\sqrt{2}$　　$B.6\sqrt{3}$　　$C.12$　$D.\frac{9\sqrt{2}}{2}$

考点：解三角形
答案：D
解析：$BD\perp AB$则ΔABD为直角三角形，则$\cos\angle ADB=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos\angle BDC=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，在$\Delta BCD$中$\cos\angle BDC=\frac{CD^2+BD^2-BC^2}{2CD\cdot BD}$， 整理得：$BD^2+2BD-15=0$，解得$BD=3,\because\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$AD=3\sqrt{3},AB=3\sqrt{2},\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BD=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.若a与7的等差中项为4，则实数$a=$

考点：等差数列中项性质
答案：1
解析：4为等差中项，则$a+7=2\times4$，则$a=1$

14.在ΔABC中，$a=\sqrt{7}$，$b=2,c=3$，则$A=$

考点：余弦定理
答案：$\frac{\pi}{3}$
解析：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，则$A=\frac{\pi}{3}$

15.若不等式 $mx^2+x+1>0$ 对一切实数 x 都成立，则实数 m 的取值范围是

考点：二次含参函数根的分布	
答案：$(\frac{1}{4},+\infty)$	
解析：$mx^2+x+1>0$ 对一切实数 x 都成立，则满足 $\begin{cases} m>0 \\ \Delta=1-4m<0 \end{cases}$，$\therefore m>\frac{1}{4}$	

16.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n+2,n\in N^*$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$

考点：构造法求数列通项

答案：$a_n=\begin{cases} 3^{n-1},n为奇数 \\ 3^{n-1}-1,n为偶数 \end{cases}$

解析：$\begin{matrix} a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n+2(n\in N^*) \\ a_{n+2}+pa_{n+1}+r=q(a_{n+1}+pa_n+r) \end{matrix}$，得 $p=1,r=1,q=3$，则 $a_{n+2}+a_{n+1}+1=3(a_{n+1}+a_n+1)$，则 $\{a_{n+1}+a_n+1\}$ 是以 4 为首相，3 为公比的等比数列，$\therefore a_{n+1}+a_n+1=4\times3^{n-1},a_{n+1}+a_n=4\times3^{n-1}-1$，则 $a_n+a_{n-1}=4\times3^{n-2}-1$，两式相减整理得：$a_{n+1}-a_{n-1}=8\times3^{n-1}$，当 n 为奇数时，

$$\begin{aligned} &a_n-a_{n-2}=8\times3^{n-3} \\ &a_{n-2}-a_{n-4}=8\times3^{n-5} \\ &a_{n-4}-a_{n-6}=8\times3^{n-7} \\ &\vdots \\ &a_5-a_3=8\times3^2 \\ &a_3-a_1=8\times3^0 \end{aligned}$$

各式相加可得：$a_n-a_1=3^n-1,\therefore a_n=3^{n-1}$，

当 n 为偶数时，同理可得：$a_n=3^{n-1}-1$

综上：$a_n=\begin{cases} 3^{n-1},n为奇数 \\ 3^{n-1}-1,n为偶数 \end{cases}$

三、解答题。本大题共 5 小题，共 52 分。

17.（本小题满分 10 分）已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=2,a_5=16$，等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1,b_4=a_3$。

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

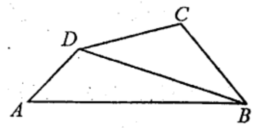
（2）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

考点：等差、等比数列的通项公式及求和公式。

解析：（1）等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=2,a_5=16,\therefore \begin{cases} a_1q=2 \\ a_1q^4=16 \end{cases}$，解得 $a_1=1,q=2,a_n=2^{n-1}$，

（2）$\because$ 等差数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1=a_1,b_4=a_3,\therefore \begin{cases} b_1=a_1=1 \\ b_1+3d=4 \end{cases}$，解得 $d=1,\therefore S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n^2+n}{2}$。

18.（本小题满分 10 分）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $AB=3\sqrt{2}, BC=CD=2, \angle ADC=150°, \angle BCD=120°$



（1）求 BD 的长；

（2）求 $\angle BAD$ 的大小.

考点：正弦定理、余弦定理的应用

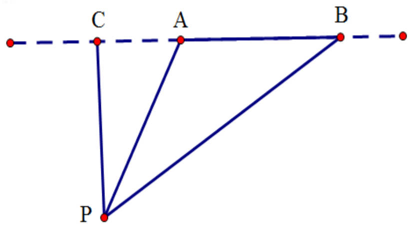
解析：（1）在 ΔBCD 中，利用余弦定理得： $BD^2=-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BCD+BC^2+CD^2=12, \therefore BD=2\sqrt{3}$

（2）在 ΔBCD 中，$\because \angle BCD=120°, BC=CD, \therefore \angle CDB=30°, \because \angle ADC=150°, \therefore \angle ADB=120°$

在 ΔBCD 中，根据正弦定理得：$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}, \therefore \sin\angle BAD=\dfrac{BD\cdot\sin\angle ADB}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\because \angle BAD$ 为锐角，$\therefore \angle BAD=45°$

19.（本小题满分 10 分）如图是某足球场地的局部平面示意图，点 A,B 表示球门的门柱，某运动员在点 P 处带球沿直线 PC 运动，准备将足球打入此球门，已知 $PC\perp AB, AC=a, BC=b, PC=x$



（1）请用 a,b,x 表示 $\tan\angle APB$ ；

（2）若 $b=3a, b-a=7.32m$ ，求该运动员最佳打门时的 x 值（精确到 $0.1m$ ）.

附：$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

考点：三角函数中的恒等变换应用，一元二次不等式及其应用

解析：（1）$\because PC\perp AB, \therefore \tan\angle APC=\dfrac{AC}{PC}=\dfrac{a}{x}, \tan\angle BPC=\dfrac{BC}{PC}=\dfrac{b}{x}$ ，

又 $\because \angle APB=\angle BPC-\angle APC, \therefore \tan\angle APB=\tan(\angle BPC-\angle APC)=\dfrac{\tan\angle BPC-\tan\angle APC}{1+\tan\angle BPC\cdot\tan\angle APC}=\dfrac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}\cdot\frac{a}{x}}=\dfrac{(b-a)x}{x^2+ab}$ ，

（2）由 $b=3a, b-a=7.32m$ ，，可解得 $a=3.66m, b=10.98m$ ，

$\therefore \tan\angle APB=\dfrac{(b-a)x}{x^2+ab}=\dfrac{7.32x}{x^2+3.66\times10.98}=\dfrac{2}{\frac{x}{3.66}+\frac{10.98}{x}}\le\dfrac{2}{2\sqrt{\frac{x}{3.66}\cdot\frac{10.98}{x}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

当且仅当 $\frac{x}{3.66}=\frac{10.98}{x}$ ，即 $x=3.66\times\sqrt{3}\approx 6.3m$ 时，上式取等，所以当运动员沿直线 PC 带球行进时，离直线 AB 的距离为 $6.3m$ 时，此时是运动员的最佳打门位置.

20.（本题满分 10 分）说明：请考生在（A）、（B）两个小题中任选一个作答

（A）在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ，且 $2a=2b\cos C+c$.

（1）求角 B 的值；

（2）若 $b=2$ ，求 ΔABC 面积的最大值.

考点：正、余弦定理；面积公式；基本不等式

解析：（1）依题意，由正弦定理得：$2\sin A=2\sin B\cos C+\sin C, 2\sin(B+C)=2\sin B\cos C+\sin C, 2\cos B\sin C=\sin C, \cos B=\frac{1}{2}, B=\frac{\pi}{3}$

（2）依题意，由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \therefore 4=a^2+c^2-ac\geq ac, S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leq\sqrt{3}$ ，所以 ΔABC 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

（B）在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 $a,b,c,$ 且 $(a-b)(\sin A+\sin B)=(a-c)\sin C$.

（1）求角 B 的值；

（2）若 $b=2$ ，求 ΔABC 面积的最大值.

考点：正弦定理，余弦定理，面积公式，基本不等式

解析：（1）由正弦定理可得：$a^2+c^2-b^2=ac$ ，由余弦定理可得：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}, 0<B<\pi, \therefore B=\frac{\pi}{3}$

（2）由（1）得，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$ ，所以 $a^2+c^2-4=ac$ ，又因为 $a^2+c^2\geq 2ac, \therefore ac\leq 4$ ，当且仅当 $a=c$ 取等号，所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leq\sqrt{3}$ ，所以 ΔABC 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

21.（本题满分 12 分）说明：请考生在（A）、（B）两个小题中任选一个作答

（A）已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $3a_n=2S_n+1(n\in N^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2\log_3 a_{n+1}(n\in N^*)$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_n\cdot b_n$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前项和为 T_n ，若 $T_n<2018$ ，求 n 的最大值。

解：（1）当 $n=1$ 时，$3a_1=2a_1+1, a_1=1$ ，当 $n\geq 2$ 时，$3a_n=2S_n+1, 3a_{n-1}=2S_{n-1}+1$ ，两式相减可得：

$3a_n-3a_{n-1}=2S_n+1-(2S_{n-1}+1)\Rightarrow a_n=3a_{n-1}$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，$a_n=3^{n-1}$

$a_{n+1}=3^n, b_n=2\log_3 a_{n+1}=2\log_3 3^n=2n$

（2）$c_n=a_n\cdot b_n=2n\cdot 3^{n-1}$

$$\begin{aligned}T_n&=2\times 3^0+4\times 3^1+6\times 3^2+\cdots+2n\times 3^{n-1}\\3T_n&=\qquad\quad 2\times 3^1+4\times 3^2+\cdots+2(n-1)\times 3^{n-1}+2n\times 3^n\end{aligned}$$
，两式相减可得：

$-2T_n=2+2\cdot3^1+2\cdot3^2+\cdots+2\cdot3^{n-1}-2\cdot n\cdot3^n=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}-2\cdot n\cdot3^n=-1+(1-2n)\cdot3^n$,

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2n-1}{2}\cdot3^n, T_n<2018, T_{n+1}-T_n=c_{n+1}=3^n\cdot2(n+1)>0$，所以 T_n 是递增的。

又当 $n=5, T_5=1094<2018$，当 $n=6, T_6=4010>2018$，所以若 $T_n<2018$，则 n 的最大值为 5.

（B）已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1, a_{n+1}=2S_n+1(n\in N^*)$，

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2a_n\cdot\log_3 a_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

（3）若 $c_n=\dfrac{2n-1}{T_n-n}(n\in N^*)$，证明 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n<\dfrac{3}{2}$

考点：已知递推关系求通项，错位相减法，数列放缩

解析：（1）由已知 $a_{n+1}=2S_n+1(n\in N^*)$ ①得

当 $n=1$ 时，$a_2=3$；当 $n\geq2$ 时，$a_n=2S_{n-1}+1$②

①-②得 $a_{n+1}=3a_n$ 所以 $a_n=a_2\cdot q^{n-2}=3^{n-1}, n\geq2$

经验证 $a_1=1$，满足上式，所以 $a_n=3^{n-1}(n\in N^*)$

（2）$b_n=2n\cdot3^{n-1}$ 所以

$T_n=2\times3^0+4\times3^1+6\times3^2+\cdots+2n\times3^{n-1}$ ①

$3T_n=\quad 2\times3^1+4\times3^2+\cdots+2(n-1)\times3^{n-1}+2n\times3^n$ ②

①-②得：$-2T_n=2+2\cdot3^1+2\cdot3^2+\cdots+2\cdot3^{n-1}-2\cdot n\cdot3^n=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}-2\cdot n\cdot3^n=-1+(1-2n)\cdot3^n, \therefore T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2n-1}{2}\cdot3^n$

（3）$c_n=\dfrac{2n-1}{T_n-n}=\dfrac{2n-1}{(n-\frac{1}{2})\cdot3^n+\frac{1}{2}-n}=\dfrac{2n-1}{(n-\frac{1}{2})\cdot(3^n-1)}=\dfrac{2}{3^n-1}$

当 $n\geq2$ 时，$c_n=\dfrac{2}{3^n-1}<\dfrac{1}{3^{n-1}}$，所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n<1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})<\dfrac{3}{2}$