

2016 年江西省中考数学试卷

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分，每小题只有一个正确选项）

1. (3 分) (2016•江西) 下列四个数中，最大的一个数是 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 0 D. -2

【分析】正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，两个负实数绝对值大的反而小，据此判断即可.

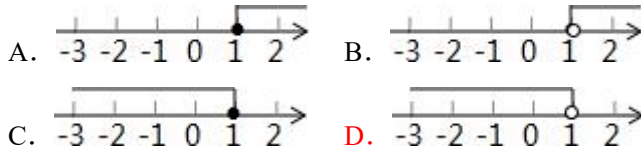
【解答】解：根据实数比较大小的方法，可得

$$-2 < 0 < \sqrt{3} < 2,$$

故四个数中，最大的一个数是 2.

故选：A.

2. (3 分) (2016•江西) 将不等式 $3x - 2 < 1$ 的解集表示在数轴上，正确的是 ()



【分析】先解出不等式 $3x - 2 < 1$ 的解集，即可解答本题.

【解答】解： $3x - 2 < 1$

移项，得

$$3x < 3,$$

系数化为 1，得

$$x < 1,$$

故选 D.

3. (3 分) (2016•江西) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 + a^2 = a^4$ B. $(-b^2)^3 = -b^6$ C. $2x \cdot 2x^2 = 2x^3$ D. $(m - n)^2 = m^2 - n^2$

【分析】结合选项分别进行合并同类项、积的乘方、单项式乘单项式、完全平方公式的运算，选出正确答案.

【解答】解：A、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，故本选项错误；

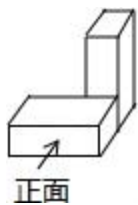
B、 $(-b^2)^3 = -b^6$ ，故本选项正确；

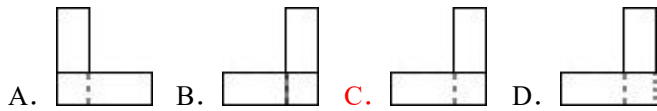
C、 $2x \cdot 2x^2 = 4x^3$ ，故本选项错误；

D、 $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$ ，故本选项错误.

故选 B.

4. (3 分) (2016•江西) 有两个完全相同的正方体，按下面如图方式摆放，其主视图是 ()





【分析】根据主视图的定义即可得到结果.

【解答】解：其主视图是 C，

故选 C.

5. (3分) (2016•江西) 设 α 、 β 是一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根，则 $\alpha\beta$ 的值是 ()

A. 2 B. 1 C. -2 D. -1

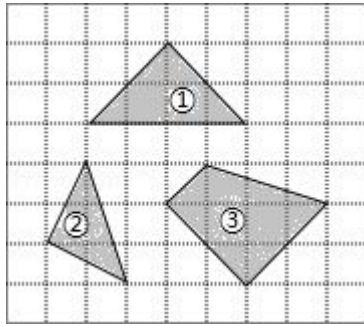
【分析】根据 α 、 β 是一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根，由根与系数的关系可以求得 $\alpha\beta$ 的值，本题得以解决.

【解答】解： $\because \alpha$ 、 β 是一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根，

$$\therefore \alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1,$$

故选 D.

6. (3分) (2016•江西) 如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长均相等. 网格中三个多边形（分别标记为①，②，③）的顶点均在格点上. 被一个多边形覆盖的网格线中，竖直部分线段长度之和记为 m ，水平部分线段长度之和记为 n ，则这三个多边形中满足 $m=n$ 的是 ()



A. 只有② B. 只有③ C. ②③ D. ①②③

【分析】利用相似三角形的判定和性质分别求出各多边形竖直部分线段长度之和与水平部分线段长度之和，再比较即可.

【解答】解：假设每个小正方形的边长为 1，

①： $m=1+2+1=4$ ， $n=2+4=6$ ，

则 $m \neq n$ ；

②在 $\triangle ACN$ 中， $BM \parallel CN$ ，

$$\therefore \frac{BM}{CN} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2},$$

在 $\triangle AGF$ 中， $DM \parallel NE \parallel FG$ ，

$$\therefore \frac{AM}{AG} = \frac{DM}{FG} = \frac{1}{3}, \quad \frac{AN}{AG} = \frac{NE}{FG} = \frac{2}{3},$$

$$\text{得 } DM = \frac{1}{3}, \quad NE = \frac{2}{3},$$

$$\therefore m=2+\frac{1}{2}=2.5, n=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=2.5,$$

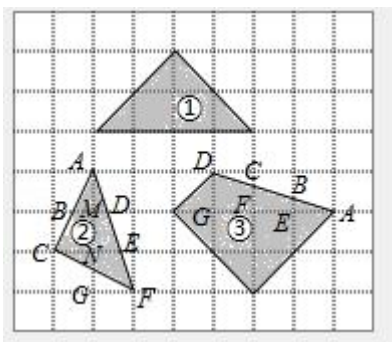
$$\therefore m=n;$$

$$\textcircled{3} \text{ 由 } \textcircled{2} \text{ 得: } BE=\frac{1}{3}, CF=\frac{2}{3},$$

$$\therefore m=2+2+\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}=6, n=4+2=6,$$

$$\therefore m=n,$$

则这三个多边形中满足 $m=n$ 的是 $\textcircled{2}$ 和 $\textcircled{3}$;
 故选 C.



二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

7. (3 分) (2016•江西) 计算: $-3+2=$ -1 .

【分析】由绝对值不等的异号加减，取绝对值较大的加数符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 互为相反数的两个数相加得 0，即可求得答案.

【解答】解: $-3+2=-1$.

故答案为: -1.

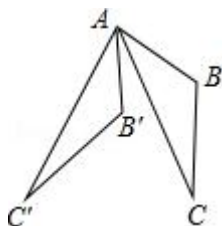
8. (3 分) (2016•江西) 分解因式: $ax^2 - ay^2=$ $a(x+y)(x-y)$.

【分析】应先提取公因式 a，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【解答】解: $ax^2 - ay^2,$
 $=a(x^2 - y^2),$
 $=a(x+y)(x-y).$

故答案为: $a(x+y)(x-y)$.

9. (3 分) (2016•江西) 如图所示， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=33^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 50° ，对应得到 $\triangle AB'C'$ ，则 $\angle B'AC$ 的度数为 17° .

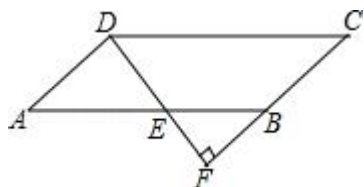


【分析】先利用旋转的性质得到 $\angle B'AC'=33^\circ$ ， $\angle BAB'=50^\circ$ ，从而得到 $\angle B'AC$ 的度数.

【解答】解: $\because \angle BAC=33^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 50° ，对应得到 $\triangle AB'C'$ ，

$\therefore \angle B'AC' = 33^\circ$, $\angle BAB' = 50^\circ$,
 $\therefore \angle B'AC$ 的度数 $= 50^\circ - 33^\circ = 17^\circ$.
 故答案为: 17° .

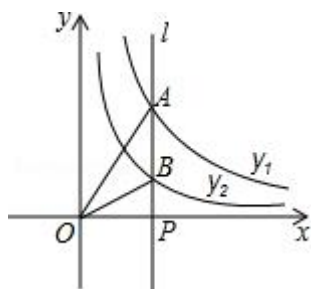
10. (3分) (2016•江西) 如图所示, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle C = 40^\circ$, 过点 D 作 AD 的垂线, 交 AB 于点 E, 交 CB 的延长线于点 F, 则 $\angle BEF$ 的度数为 50° .



【分析】 由“平行四边形的对边相互平行”、“两直线平行, 同位角相等”以及“直角三角形的两个锐角互余”的性质进行解答.

【解答】 解: \because 四边形 ABCD 是平行四边形,
 $\therefore DC \parallel AB$,
 $\therefore \angle C = \angle ABF$.
 又 $\because \angle C = 40^\circ$,
 $\therefore \angle ABF = 40^\circ$.
 $\because EF \perp BF$,
 $\therefore \angle F = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BEF = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
 故答案是: 50° .

11. (3分) (2016•江西) 如图, 直线 $l \perp x$ 轴于点 P, 且与反比例函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 及 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($x > 0$) 的图象分别交于点 A, B, 连接 OA, OB, 已知 $\triangle OAB$ 的面积为 2, 则 $k_1 - k_2 =$ 4.



【分析】 由反比例函数的图象过第一象限可得出 $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, 再由反比例函数系数 k 的几何意义即可得出 $S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2}k_1$, $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}k_2$, 根据 $\triangle OAB$ 的面积为 2 结合三角形之间的关系即可得出结论.

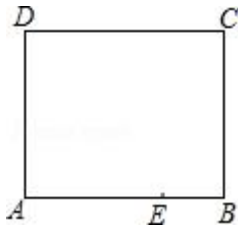
【解答】 解: \because 反比例函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 及 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($x > 0$) 的图象均在第一象限内,
 $\therefore k_1 > 0$, $k_2 > 0$.
 $\because AP \perp x$ 轴,
 $\therefore S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2}k_1$, $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}k_2$.

$$\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAP} - S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2} (k_1 - k_2) = 2,$$

解得： $k_1 - k_2 = 4$.

故答案为：4.

12. (3分) (2016•江西) 如图是一张长方形纸片 ABCD, 已知 $AB=8$, $AD=7$, E 为 AB 上一点, $AE=5$, 现要剪下一张等腰三角形纸片 ($\triangle AEP$), 使点 P 落在长方形 ABCD 的某一条边上, 则等腰三角形 AEP 的底边长是 $5\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{5}$ 或 5.



【分析】分情况讨论：①当 $AP=AE=5$ 时，则 $\triangle AEP$ 是等腰直角三角形，得出底边 $PE = \sqrt{2}AE = 5\sqrt{2}$ 即可；

②当 $PE=AE=5$ 时，求出 BE，由勾股定理求出 PB，再由勾股定理求出等边 AP 即可；

③当 $PA=PE$ 时，底边 $AE=5$ ；即可得出结论。

【解答】解：如图所示：

①当 $AP=AE=5$ 时，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AEP$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \text{底边 } PE = \sqrt{2}AE = 5\sqrt{2};$$

②当 $PE=AE=5$ 时，

$$\therefore BE = AB - AE = 8 - 5 = 3, \angle B = 90^\circ,$$

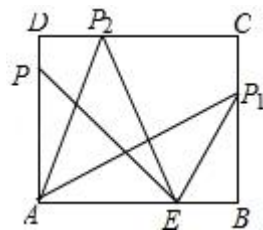
$$\therefore PB = \sqrt{PE^2 - BE^2} = 4,$$

$$\therefore \text{底边 } AP = \sqrt{AB^2 + PB^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5};$$

③当 $PA=PE$ 时，底边 $AE=5$ ；

综上所述：等腰三角形 AEP 的对边长为 $5\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{5}$ 或 5；

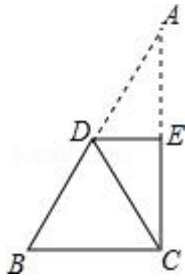
故答案为： $5\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{5}$ 或 5.



三、解答题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 27 分)

13. (3分) (2016•江西) (1) 解方程组:
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = y + 1 \end{cases}.$$

(2) 如图, Rt△ABC 中, ∠ACB=90°, 将 Rt△ABC 向下翻折, 使点 A 与点 C 重合, 折痕为 DE. 求证: DE∥BC.



【分析】(1) 根据方程组的解法解答即可;

(2) 由翻折可知 ∠AED=∠CED=90°, 再利用平行线的判定证明即可.

【解答】解: (1)
$$\begin{cases} x - y = 2 \text{ ①} \\ x - y = y + 1 \text{ ②} \end{cases}$$

① - ②得: $y = 1$,

把 $y = 1$ 代入 ① 可得: $x = 3$,

所以方程组的解为
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

(2) ∵ 将 Rt△ABC 向下翻折, 使点 A 与点 C 重合, 折痕为 DE.

∴ ∠AED = ∠CED = 90°,

∴ ∠AED = ∠ACB = 90°,

∴ DE∥BC.

14. (6分) (2016•江西) 先化简, 再求值: $(\frac{2}{x+3} + \frac{1}{3-x}) \div \frac{x}{x^2-9}$, 其中 $x=6$.

【分析】先算括号里面的, 再算除法, 最后把 $x=6$ 代入进行计算即可.

【解答】解: 原式 =
$$\frac{2(x-3) - (x+3)}{(x+3)(x-3)} \div \frac{x}{x^2-9}$$

$$= \frac{2x-6-x-3}{(x+3)(x-3)} \div \frac{x}{x^2-9}$$

$$= \frac{x-9}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x}$$

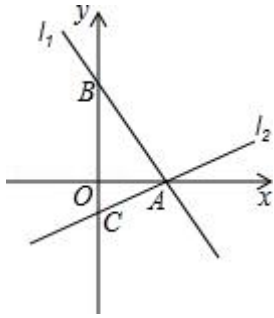
$$= \frac{x-9}{x},$$

当 $x=6$ 时, 原式 =
$$\frac{6-9}{6} = -\frac{1}{2}.$$

15. (6分) (2016•江西) 如图, 过点 A (2, 0) 的两条直线 l_1, l_2 分别交 y 轴于点 B, C, 其中点 B 在原点上方, 点 C 在原点下方, 已知 $AB = \sqrt{13}$.

(1) 求点 B 的坐标;

(2) 若 △ABC 的面积为 4, 求直线 l_2 的解析式.



【分析】(1) 先根据勾股定理求得 BO 的长，再写出点 B 的坐标；

(2) 先根据 $\triangle ABC$ 的面积为 4，求得 CO 的长，再根据点 A、C 的坐标，运用待定系数法求得直线 l_2 的解析式。

【解答】解：(1) \because 点 A (2, 0), $AB = \sqrt{13}$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{9} = 3$$

\therefore 点 B 的坐标为 (0, 3);

(2) $\because \triangle ABC$ 的面积为 4

$$\therefore \frac{1}{2} \times BC \times AO = 4$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times BC \times 2 = 4, \text{ 即 } BC = 4$$

$$\because BO = 3$$

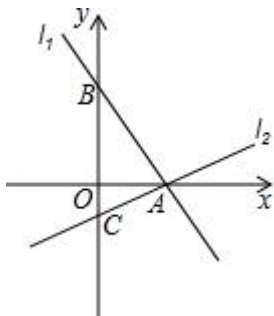
$$\therefore CO = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore C (0, -1)$$

设 l_2 的解析式为 $y = kx + b$, 则

$$\begin{cases} 0 = 2k + b \\ -1 = b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\therefore l_2 \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x - 1$$

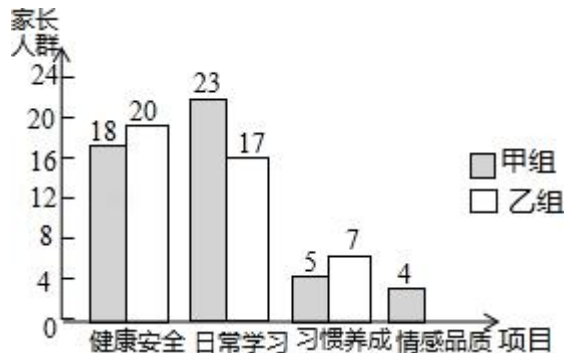


16. (6分) (2016•江西) 为了了解家长关注孩子成长方面的状况，学校开展了针对学生家长的“您最关心孩子哪方面成长”的主题调查，调查设置了“健康安全”、“日常学习”、“习惯养成”、“情感品质”四个项目，并随机抽取甲、乙两班共 100 位学生家长进行调查，根据调查结果，绘制了如图不完整的条形统计图。

(1) 补全条形统计图。

(2) 若全校共有 3600 位学生家长，据此估计，有多少位家长最关心孩子“情感品质”方面的成长？

(3) 综合以上主题调查结果，结合自身现状，你更希望得到以上四个项目中哪方面的关注和指导？

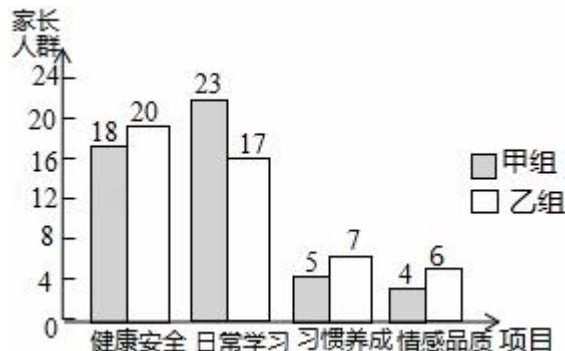


【分析】(1) 用甲、乙两班学生家长共 100 人减去其余各项目人数可得乙组关心“情感品质”的家长人数，补全图形即可；

(2) 用样本中关心孩子“情感品质”方面的家长数占被调查人数的比例乘以总人数 3600 可得答案；

(3) 无确切答案，结合自身情况或条形统计图，言之有理即可。

【解答】解：(1) 乙组关心“情感品质”的家长有： $100 - (18+20+23+17+5+7+4) = 6$ (人)，补全条形统计图如图：



(2) $\frac{4+6}{100} \times 3600 = 360$ (人)。

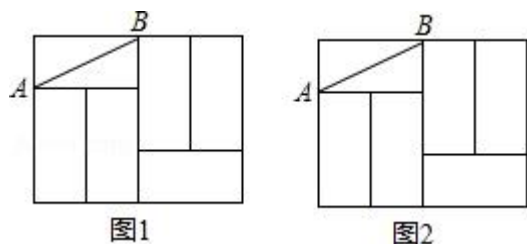
答：估计约有 360 位家长最关心孩子“情感品质”方面的成长；

(3) 无确切答案，结合自身情况或条形统计图，言之有理即可，如：从条形统计图中，家长对“情感品质”关心不够，可适当关注与指导。

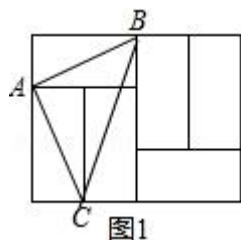
17. (6 分) (2016•江西) 如图，六个完全相同的小长方形拼成了一个大长方形，AB 是其中一个小长方形的对角线，请在大长方形中完成下列画图，要求：①仅用无刻度直尺，②保留必要的画图痕迹。

(1) 在图 1 中画出一个 45° 角，使点 A 或点 B 是这个角的顶点，且 AB 为这个角的一边；

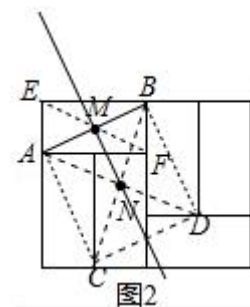
(2) 在图 2 中画出线段 AB 的垂直平分线。



【分析】(1) 根据等腰直角三角形的性质即可解决问题.
 (2) 根据正方形、长方形的性质对角线相等且互相平分, 即可解决问题.
【解答】解: (1) 如图所示, $\angle ABC=45^\circ$. (AB、AC 是小长方形的对角线).



(2) 线段 AB 的垂直平分线如图所示,



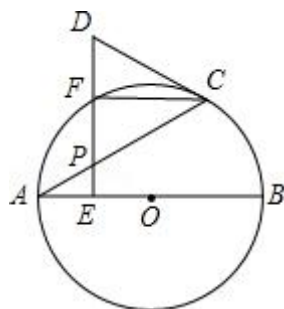
点 M 是长方形 AFBE 是对角线交点, 点 N 是正方形 ABCD 的对角线的交点, 直线 MN 就是所求的线段 AB 的垂直平分线.

四、(本大题共 4 小题, 每小题 8 分, 共 32 分)

18. (8 分) (2016•江西) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 P 是弦 AC 上一动点 (不与 A, C 重合), 过点 P 作 $PE \perp AB$, 垂足为 E, 射线 EP 交 \widehat{AC} 于点 F, 交过点 C 的切线于点 D.

(1) 求证: $DC=DP$;

(2) 若 $\angle CAB=30^\circ$, 当 F 是 \widehat{AC} 的中点时, 判断以 A, O, C, F 为顶点的四边形是什么特殊四边形? 说明理由.



【分析】(1) 连接 OC ，根据切线的性质和 $PE \perp OE$ 以及 $\angle OAC = \angle OCA$ 得 $\angle APE = \angle DPC$ ，然后结合对顶角的性质可证得结论；

(2) 由 $\angle CAB = 30^\circ$ 易得 $\triangle OBC$ 为等边三角形，可得 $\angle AOC = 120^\circ$ ，由 F 是 \widehat{AC} 的中点，易得 $\triangle AOF$ 与 $\triangle COF$ 均为等边三角形，可得 $AF = AO = OC = CF$ ，易得以 A, O, C, F 为顶点的四边形是菱形。

【解答】(1) 证明：连接 OC ，

$\because \angle OAC = \angle ACO, PE \perp OE, OC \perp CD,$

$\therefore \angle APE = \angle PCD,$

$\because \angle APE = \angle DPC,$

$\therefore \angle DPC = \angle PCD,$

$\therefore DC = DP;$

(2) 解：以 A, O, C, F 为顶点的四边形是菱形；

$\because \angle CAB = 30^\circ, \therefore \angle B = 60^\circ,$

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle AOC = 120^\circ,$

连接 $OF, AF,$

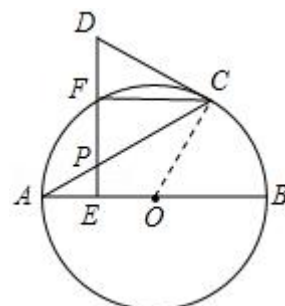
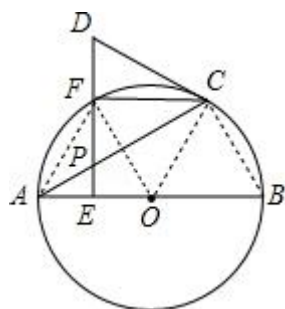
$\because F$ 是 \widehat{AC} 的中点，

$\therefore \angle AOF = \angle COF = 60^\circ,$

$\therefore \triangle AOF$ 与 $\triangle COF$ 均为等边三角形，

$\therefore AF = AO = OC = CF,$

\therefore 四边形 $OACF$ 为菱形。

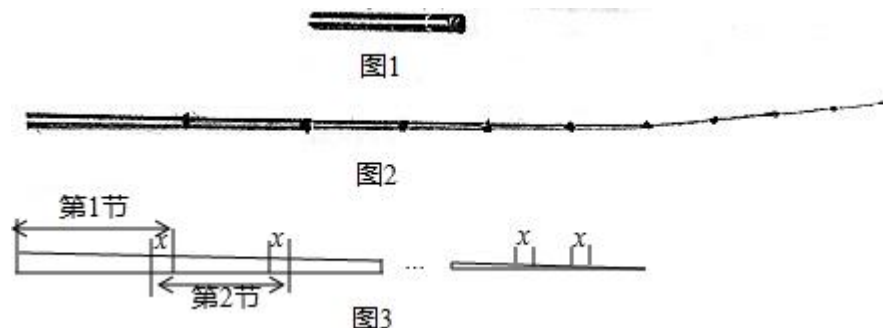


19. (8分) (2016•江西) 如图是一根可伸缩的鱼竿，鱼竿是用 10 节大小不同的空心套管连接而成。闲置时鱼竿可收缩，完全收缩后，鱼竿长度即为第 1 节套管的长度 (如图 1 所示)；使用时，可将鱼竿的每一节套管都完全拉伸 (如图 2 所示)。图 3 是这跟鱼竿所有套管都处

于完全拉伸状态下的平面示意图. 已知第 1 节套管长 50cm, 第 2 节套管长 46cm, 以此类推, 每一节套管均比前一节套管少 4cm. 完全拉伸时, 为了使相邻两节套管连接并固定, 每相邻两节套管间均有相同长度的重叠, 设其长度为 x cm.

(1) 请直接写出第 5 节套管的长度;

(2) 当这根鱼竿完全拉伸时, 其长度为 311cm, 求 x 的值.



【分析】(1) 根据“第 n 节套管的长度=第 1 节套管的长度 - $4 \times (n - 1)$ ”, 代入数据即可得出结论;

(2) 同 (1) 的方法求出第 10 节套管重叠的长度, 设每相邻两节套管间的长度为 x cm, 根据“鱼竿长度=每节套管长度相加 - $(10 - 1) \times$ 相邻两节套管间的长度”, 得出关于 x 的一元一次方程, 解方程即可得出结论.

【解答】解: (1) 第 5 节套管的长度为: $50 - 4 \times (5 - 1) = 34$ (cm).

(2) 第 10 节套管的长度为: $50 - 4 \times (10 - 1) = 14$ (cm),

设每相邻两节套管间重叠的长度为 x cm,

根据题意得: $(50 + 46 + 42 + \dots + 14) - 9x = 311$,

即: $320 - 9x = 311$,

解得: $x = 1$.

答: 每相邻两节套管间重叠的长度为 1cm.

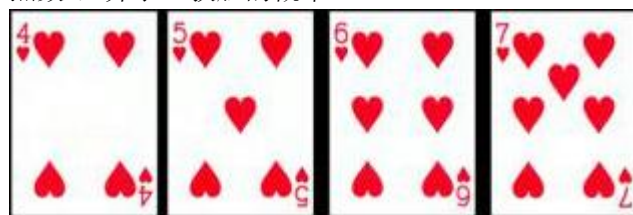
20. (8 分) (2016•江西) 甲、乙两人利用扑克牌玩“10 点”游戏, 游戏规则如下:

- ① 将牌面数字作为“点数”, 如红桃 6 的“点数”就是 6 (牌面点数与牌的花色无关);
- ② 两人摸牌结束时, 将所摸牌的“点数”相加, 若“点数”之和小于或等于 10, 此时“点数”之和就是“最终点数”; 若“点数”之和大于 10, 则“最终点数”是 0;
- ③ 游戏结束前双方均不知道对方“点数”;
- ④ 判定游戏结果的依据是: “最终点数”大的一方获胜, “最终点数”相等时不分胜负.

现甲、乙均各自摸了两张牌, 数字之和都是 5, 这时桌上还有四张背面朝上的扑克牌, 牌面数字分别是 4, 5, 6, 7.

(1) 若甲从桌上继续摸一张扑克牌, 乙不再摸牌, 则甲获胜的概率为 $\frac{1}{2}$;

(2) 若甲先从桌上继续摸一张扑克牌, 接着乙从剩下的扑克牌中摸出一张牌, 然后双方不再摸牌. 请用树状图或表格表示出这次摸牌后所有可能的结果, 再列表呈现甲、乙的“最终点数”, 并求乙获胜的概率.



【分析】(1) 由现甲、乙均各自摸了两张牌，数字之和都是 5，甲从桌上继续摸一张扑克牌，乙不再摸牌，甲摸牌数字是 4 与 5 则获胜，直接利用概率公式求解即可求得答案；

(2) 首先根据题意画出树状图，然后根据树状图列出甲、乙的“最终点数”，继而求得答案.

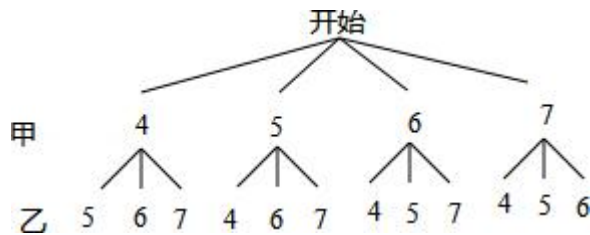
【解答】解：(1) ∵ 现甲、乙均各自摸了两张牌，数字之和都是 5，甲从桌上继续摸一张扑克牌，乙不再摸牌，

∴ 甲摸牌数字是 4 与 5 则获胜，

∴ 甲获胜的概率为： $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ；

故答案为： $\frac{1}{2}$ ；

(2) 画树状图得：



则共有 12 种等可能的结果；

列表得：

甲	5											
	4	5	6	7								
甲“最终点数”	9	10	11	12								
乙	5											
	5	6	7	4	6	7	4	5	7	4	5	6
乙“最终点数”	10	11	12	9	11	12	9	10	12	9	10	11
获胜情况	乙胜	甲胜	甲胜	甲胜	甲胜	甲胜	乙胜	乙胜	平	乙胜	乙胜	平

∴ 乙获胜的概率为： $\frac{5}{12}$ 。

21. (8 分) (2016•江西) 如图 1 是一副创意卡通圆规，图 2 是其平面示意图，OA 是支撑臂，OB 是旋转臂，使用时，以点 A 为支撑点，铅笔芯端点 B 可绕点 A 旋转作出圆。已知 OA=OB=10cm.

(1) 当 $\angle AOB=18^\circ$ 时，求所作圆的半径；(结果精确到 0.01cm)

(2) 保持 $\angle AOB=18^\circ$ 不变，在旋转臂 OB 末端的铅笔芯折断了一截的情况下，作出的圆与 (1) 中所作圆的大小相等，求铅笔芯折断部分的长度。(结果精确到 0.01cm)

(参考数据： $\sin 9^\circ \approx 0.1564$ ， $\cos 9^\circ \approx 0.9877$ ， $\sin 18^\circ \approx 0.3090$ ， $\cos 18^\circ \approx 0.9511$ ，可使用科学计算器)



图1



图2

【分析】(1) 根据题意作辅助线 $OC \perp AB$ 于点 C , 根据 $OA=OB=10\text{cm}$, $\angle OCB=90^\circ$, $\angle AOB=18^\circ$, 可以求得 $\angle BOC$ 的度数, 从而可以求得 AB 的长;

(2) 由题意可知, 作出的圆与 (1) 中所作圆的大小相等, 则 $AE=AB$, 然后作出相应的辅助线, 画出图形, 从而可以求得 BE 的长, 本题得以解决.

【解答】解: (1) 作 $OC \perp AB$ 于点 C , 如右图 2 所示, 由题意可得, $OA=OB=10\text{cm}$, $\angle OCB=90^\circ$, $\angle AOB=18^\circ$,
 $\therefore \angle BOC=9^\circ$

$$\therefore AB=2BC=2OB \cdot \sin 9^\circ \approx 2 \times 10 \times 0.1564 \approx 3.13\text{cm},$$

即所作圆的半径约为 3.13cm ;

(2) 作 $AD \perp OB$ 于点 D , 作 $AE=AB$, 如下图 3 所示,

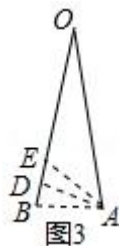


图3

\because 保持 $\angle AOB=18^\circ$ 不变, 在旋转臂 OB 末端的铅笔芯折断了一截的情况下, 作出的圆与 (1) 中所作圆的大小相等,

\therefore 折断的部分为 BE ,

$\because \angle AOB=18^\circ$, $OA=OB$, $\angle ODA=90^\circ$,

$\therefore \angle OAB=81^\circ$, $\angle OAD=72^\circ$,

$\therefore \angle BAD=9^\circ$,

$$\therefore BE=2BD=2AB \cdot \sin 9^\circ \approx 2 \times 3.13 \times 0.1564 \approx 0.98\text{cm},$$

即铅笔芯折断部分的长度是 0.98cm .

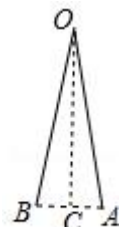


图2

五、(本大题共 10 分)

22. (10 分) (2016·江西) 如图, 将正 n 边形绕点 A 顺时针旋转 60° 后, 发现旋转前后两图形有另一交点 O , 连接 AO , 我们称 AO 为“叠弦”; 再将“叠弦” AO 所在的直线绕点 A 逆时

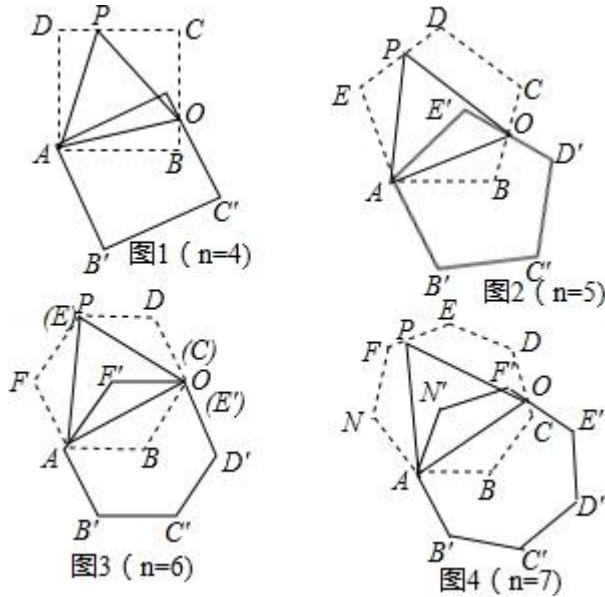
针旋转 60° 后，交旋转前的图形于点 P，连接 PO，我们称 $\angle OAB$ 为“叠弦角”， $\triangle AOP$ 为“叠弦三角形”。

【探究证明】

- (1) 请在图 1 和图 2 中选择其中一个证明：“叠弦三角形” ($\triangle AOP$) 是等边三角形；
- (2) 如图 2，求证： $\angle OAB = \angle OAE'$ 。

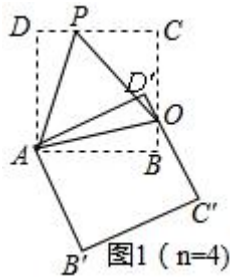
【归纳猜想】

- (3) 图 1、图 2 中的“叠弦角”的度数分别为 15° ， 24° ；
- (4) 图 n 中，“叠弦三角形”是 是 等边三角形 (填“是”或“不是”)
- (5) 图 n 中，“叠弦角”的度数为 $60^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ (用含 n 的式子表示)



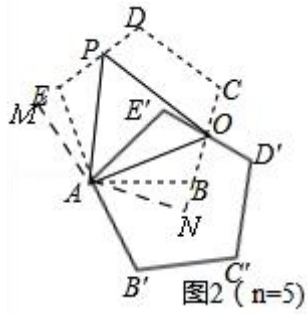
- 【分析】** (1) 先由旋转的性质，再判断出 $\triangle APD \cong \triangle AOD'$ ，最后用旋转角计算即可；
 (2) 先判断出 $Rt\triangle AEM \cong Rt\triangle ABN$ ，在判断出 $Rt\triangle APM \cong Rt\triangle AON$ 即可；
 (3) 先判断出 $\triangle AD'O \cong \triangle ABO$ ，再利用正方形，正五边形的性质和旋转的性质，计算即可；
 (4) 先判断出 $\triangle APF \cong \triangle AE'F'$ ，再用旋转角为 60° ，从而得出 $\triangle PAO$ 是等边三角形；
 (5) 用 (3) 的方法求出正 n 边形的，“叠弦角”的度数。

【解答】 解：(1) 如图 1，



- \because 四 ABCD 是正方形，
 由旋转知： $AD = AD'$ ， $\angle D = \angle D' = 90^\circ$ ， $\angle DAD' = \angle OAP = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle DAP = \angle D'AO$ ，
 $\therefore \triangle APD \cong \triangle AOD'$ (ASA)
 $\therefore AP = AO$ ，
 $\because \angle OAP = 60^\circ$ ，
 $\therefore \triangle AOP$ 是等边三角形，

(2) 如图 2,



作 $AM \perp DE$ 于 M , 作 $AN \perp CB$ 于 N .

\because 五 $ABCDE$ 是正五边形,

由旋转知: $AE=AE'$, $\angle E=\angle E'=108^\circ$, $\angle EAE'=\angle OAP=60^\circ$

$\therefore \angle EAP=\angle E'AO$

$\therefore \triangle APE \cong \triangle AOE'$ (ASA)

$\therefore \angle OAE'=\angle PAE$.

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中, $\angle AEM=\angle ABN=72^\circ$, $AE=AB$

$\therefore \text{Rt}\triangle AEM \cong \text{Rt}\triangle ABN$ (AAS),

$\therefore \angle EAM=\angle BAN$, $AM=AN$.

在 $\text{Rt}\triangle APM$ 和 $\text{Rt}\triangle AON$ 中, $AP=AO$, $AM=AN$

$\therefore \text{Rt}\triangle APM \cong \text{Rt}\triangle AON$ (HL).

$\therefore \angle PAM=\angle OAN$,

$\therefore \angle PAE=\angle OAB$

$\therefore \angle OAE'=\angle OAB$ (等量代换).

(3) 由 (1) 有, $\triangle APD \cong \triangle AOD'$,

$\therefore \angle DAP=\angle D'AO$,

在 $\triangle AD'O$ 和 $\triangle ABO$ 中,

$$\begin{cases} AD' = AB \\ AO = AO \end{cases},$$

$\therefore \triangle AD'O \cong \triangle ABO$,

$\therefore \angle D'AO=\angle BAO$,

由旋转得, $\angle DAD'=60^\circ$,

$\because \angle DAB=90^\circ$,

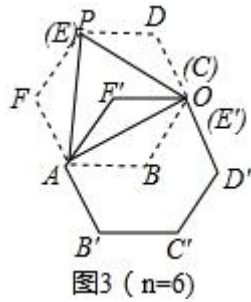
$\therefore \angle D'AB=\angle DAB - \angle DAD'=30^\circ$,

$\therefore \angle D'AD=\frac{1}{2}\angle D'AB=15^\circ$,

同理可得, $\angle E'AO=24^\circ$,

故答案为: 15° , 24° .

(4) 如图 3,



∵六边形 ABCDEF 和六边形 A'B'C'E'F'是正六边形，

∴∠F=F'=120°，

由旋转得，AF=AF'，EF=E'F'，

∴△APF≅△AE'F'，

∴∠PAF=∠E'AF'，

由旋转得，∠FAF'=60°，AP=AO

∴∠PAO=∠FAO=60°，

∴△PAO 是等边三角形.

故答案为：是

(5) 同 (3) 的方法得， $\angle OAB = [(n-2) \times 180^\circ \div n - 60^\circ] \div 2 = 60^\circ - \frac{180^\circ}{n}$

故答案： $60^\circ - \frac{180^\circ}{n}$.

六、(本大题共 12 分)

23. (12 分) (2016•江西) 设抛物线的解析式为 $y=ax^2$ ，过点 $B_1(1, 0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 $A_1(1, 2)$ ；过点 $B_2(\frac{1}{2}, 0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 A_2 ；...；过点 B_n

$(\frac{1}{2}^{n-1}, 0)$ (n 为正整数) 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 A_n ，连接 A_nB_{n+1} ，得 $Rt\triangle A_nB_nB_{n+1}$.

(1) 求 a 的值；

(2) 直接写出线段 A_nB_n ， B_nB_{n+1} 的长 (用含 n 的式子表示)；

(3) 在系列 $Rt\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 中，探究下列问题：

① 当 n 为何值时， $Rt\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形？

② 设 $1 \leq k < m \leq n$ (k, m 均为正整数)，问：是否存在 $Rt\triangle A_kB_kB_{k+1}$ 与 $Rt\triangle A_mB_mB_{m+1}$ 相似？若存在，求出其相似比；若不存在，说明理由。

【分析】 (1) 直接把点 A_1 的坐标代入 $y=ax^2$ 求出 a 的值；

(2) 由题意可知： A_1B_1 是点 A_1 的纵坐标：则 $A_1B_1=2 \times 1^2=2$ ； A_2B_2 是点 A_2 的纵坐标：则 $A_2B_2=2 \times (\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ ；... 则 $A_nB_n=2x^2=2 \times [\frac{1}{2}^{n-1}]^2=(\frac{1}{2})^{2n-3}$ ；

$B_1B_2=1 - \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ， $B_2B_3=\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^2$ ，...， $B_nB_{n+1}=(\frac{1}{2})^n$ ；

(3) 因为 $Rt\triangle A_kB_kB_{k+1}$ 与 $Rt\triangle A_mB_mB_{m+1}$ 是直角三角形，所以分两种情况讨论：根据 (2) 的结论代入所得的对应边的比列式，计算求出 k 与 m 的关系，并与 $1 \leq k < m \leq n$ (k, m 均为正整数) 相结合，得出两种符合条件的值，分别代入两相似直角三角形计算相似比。

【解答】 解：(1) ∵点 $A_1(1, 2)$ 在抛物线的解析式为 $y=ax^2$ 上，

∴ a=2;

$$(2) A_n B_n = 2x^2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3},$$

$$B_n B_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

(3) 由 $\text{Rt}\triangle A_n B_n B_{n+1}$ 是等腰直角三角形得 $A_n B_n = B_n B_{n+1}$, 则: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$2n - 3 = n, \quad n = 3,$$

∴ 当 $n=3$ 时, $\text{Rt}\triangle A_n B_n B_{n+1}$ 是等腰直角三角形,

② 依题意得, $\angle A_k B_k B_{k+1} = \angle A_m B_m B_{m+1} = 90^\circ$,

有两种情况: i) 当 $\text{Rt}\triangle A_k B_k B_{k+1} \sim \text{Rt}\triangle A_m B_m B_{m+1}$ 时,

$$\frac{A_k B_k}{A_m B_m} = \frac{B_k B_{k+1}}{B_m B_{m+1}}, \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-3}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)^m}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-m},$$

所以, $k=m$ (舍去),

ii) 当 $\text{Rt}\triangle A_k B_k B_{k+1} \sim \text{Rt}\triangle B_{m+1} B_m A_m$ 时,

$$\frac{A_k B_k}{B_{m+1} B_m} = \frac{B_k B_{k+1}}{B_m A_m}, \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^m} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-3}}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-3-m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2m+3},$$

$$\therefore k+m=6,$$

∵ $1 \leq k < m \leq n$ (k, m 均为正整数),

$$\therefore \text{取} \begin{cases} k=1 \\ m=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=2 \\ m=4 \end{cases};$$

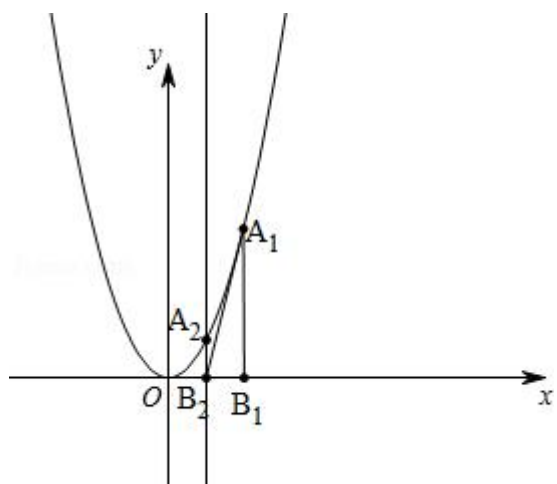
当 $\begin{cases} k=1 \\ m=5 \end{cases}$ 时, $\text{Rt}\triangle A_1 B_1 B_2 \sim \text{Rt}\triangle B_6 B_5 A_5$,

$$\text{相似比为: } \frac{A_1 B_1}{B_6 B_5} = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 64,$$

当 $\begin{cases} k=2 \\ m=4 \end{cases}$ 时, $\text{Rt}\triangle A_2 B_2 B_3 \sim \text{Rt}\triangle B_5 B_4 A_4$,

$$\text{相似比为: } \frac{A_2 B_2}{B_5 B_4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 8,$$

所以: 存在 $\text{Rt}\triangle A_k B_k B_{k+1}$ 与 $\text{Rt}\triangle A_m B_m B_{m+1}$ 相似, 其相似比为 64: 1 或 8: 1.



参与本试卷答题和审题的老师有：放飞梦想；zgm666；HJJ；王学峰；tcm123；zcx；lanhong；lf2-9；1987483819；nhx600；曹先生；wdzymsy@126.com；ZJX；szl；三界无我；弯弯的小河；fangcao；星月相随（排名不分先后）

菁优网

2016年7月16日