

参考答案:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	B	D	A	B	D	C	A	B	A

13.6 14. -63 15.16 16. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

17. (12分)

解: (1) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$.

由题设知, $\frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin \angle ADB}$, 所以 $\sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知, $\angle ADB < 90^\circ$, 所以 $\cos \angle ADB = \sqrt{1 - \frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{23}}{5}$.

(2) 由题设及 (1) 知, $\cos \angle BDC = \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2 \cdot BD \cdot DC \cdot \cos \angle BDC$$

$$= 25 + 8 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$= 25.$$

所以 $BC = 5$.

18. (12分)

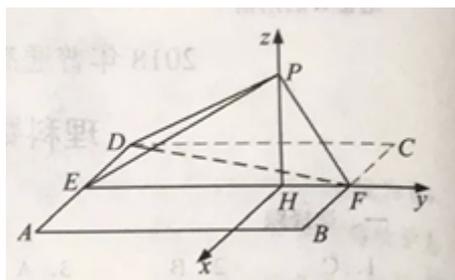
解: (1) 由已知可得, $BF \perp PF$, $BF \perp EF$, 所以 $BF \perp$ 平面 PEF .

又 $BF \subset$ 平面 $ABFD$, 所以平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$.

(2) 作 $PH \perp EF$, 垂足为 H . 由 (1) 得, $PH \perp$ 平面 $ABFD$.

以 H 为坐标原点, \overrightarrow{HF} 的方向为 y 轴正方向, $|\overrightarrow{BF}|$ 为单位长, 建立如图所示的空间直角坐标系

$H-xyz$.



由 (1) 可得, $DE \perp PE$. 又 $DP=2$, $DE=1$, 所以 $PE=\sqrt{3}$. 又 $PF=1$, $EF=2$, 故 $PE \perp PF$.

可得 $PH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $EH = \frac{3}{2}$.

则 $H(0,0,0)$, $P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(-1,-\frac{3}{2},0)$, $\overrightarrow{DP} = (1, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{HP} = (0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 为平面 $ABFD$ 的法向量.

设 DP 与平面 $ABFD$ 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{DP}|}{|\overrightarrow{HP}| \cdot |\overrightarrow{DP}|} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

19. (12分)

解: (1) 由已知得 $F(1,0)$, l 的方程为 $x=1$.

由已知可得, 点 A 的坐标为 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 AM 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ 或 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$.

(2) 当 l 与 x 轴重合时, $\angle OMA = \angle OMB = 0^\circ$.

当 l 与 x 轴垂直时, OM 为 AB 的垂直平分线, 所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时, 设 l 的方程为 $y = k(x-1) (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 < \sqrt{2}, x_2 < \sqrt{2}$, 直线 MA, MB 的斜率之和为 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$.

由 $y_1 = kx_1 - k, y_2 = kx_2 - k$ 得

$$k_{MA} + k_{MB} = \frac{2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

将 $y = k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 得

$$(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0.$$

所以, $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$.

$$\text{则 } 2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k = \frac{4k^3 - 4k - 12k^3 + 8k^3 + 4k}{2k^2 + 1} = 0.$$

从而 $k_{MA} + k_{MB} = 0$, 故 MA, MB 的倾斜角互补, 所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

综上, $\angle OMA = \angle OMB$.

20. (12 分)

解: (1) 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p) = C_{20}^2 p^2 (1-p)^{18}$. 因此

$$f'(p) = C_{20}^2 [2p(1-p)^{18} - 18p^2(1-p)^{17}] = 2C_{20}^2 p(1-p)^{17} (1-10p).$$

令 $f'(p) = 0$, 得 $p = 0.1$. 当 $p \in (0, 0.1)$ 时, $f'(p) > 0$; 当 $p \in (0.1, 1)$ 时, $f'(p) < 0$.

所以 $f(p)$ 的最大值点为 $p_0 = 0.1$.

(2) 由 (1) 知, $p = 0.1$.

(i) 令 Y 表示余下的 180 件产品中的不合格品件数, 依题意知 $Y: B(180, 0.1)$, $X = 20 \times 2 + 25Y$,

即 $X = 40 + 25Y$.

所以 $EX = E(40 + 25Y) = 40 + 25EY = 490$.

(ii) 如果对余下的产品作检验, 则这一箱产品所需要的检验费为 400 元.

由于 $EX > 400$, 故应该对余下的产品作检验.

21. (12 分)

解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$.

(i) 若 $a \leq 2$, 则 $f'(x) \leq 0$, 当且仅当 $a = 2$, $x = 1$ 时 $f'(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

(ii) 若 $a > 2$, 令 $f'(x) = 0$ 得, $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

当 $x \in (0, \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}) \cup (\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}, \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$, $(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}, +\infty)$ 单调递减, 在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}, \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 单调递增.

(2) 由 (1) 知, $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$.

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $x^2 - ax + 1 = 0$, 所以 $x_1 x_2 = 1$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 > 1$. 由于

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{-2 \ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2},$$

所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 等价于 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$.

设函数 $g(x) = \frac{1}{x} - x + 2 \ln x$, 由 (1) 知, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 又 $g(1) = 0$, 从而当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$.

所以 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$, 即 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

【解析】(1) 由 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 得 C_2 的直角坐标方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

(2) 由 (1) 知 C_2 是圆心为 $A(-1, 0)$, 半径为 2 的圆.

由题设知, C_1 是过点 $B(0, 2)$ 且关于 y 轴对称的两条射线. 记 y 轴右边的射线为 l_1 , y 轴左边的射线为 l_2 . 由于 B 在圆 C_2 的外面, 故 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点等价于 l_1 与 C_2 只有一个公共点且 l_2 与 C_2 有两个公共点, 或 l_2 与 C_2 只有一个公共点且 l_1 与 C_2 有两个公共点. 学#科网

当 l_1 与 C_2 只有一个公共点时, A 到 l_1 所在直线的距离为 2, 所以 $\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, 故 $k = -\frac{4}{3}$ 或 $k = 0$.

经检验, 当 $k = 0$ 时, l_1 与 C_2 没有公共点; 当 $k = -\frac{4}{3}$ 时, l_1 与 C_2 只有一个公共点, l_2 与 C_2 有两个公

共点.

当 l_2 与 C_2 只有一个公共点时, A 到 l_2 所在直线的距离为 2, 所以 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, 故 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$.

经检验, 当 $k=0$ 时, l_1 与 C_2 没有公共点; 当 $k=\frac{4}{3}$ 时, l_2 与 C_2 没有公共点.

综上, 所求 C_1 的方程为 $y=-\frac{4}{3}|x|+2$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1, \\ 2x, & -1 < x < 1, \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

【解析】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=|x+1|-|x-1|$, 即

故不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 $\{x | x > \frac{1}{2}\}$.

(2) 当 $x \in (0, 1)$ 时 $|x+1|-|ax-1| > x$ 成立等价于当 $x \in (0, 1)$ 时 $|ax-1| < 1$ 成立.

若 $a \leq 0$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时 $|ax-1| \geq 1$;

若 $a > 0$, $|ax-1| < 1$ 的解集为 $0 < x < \frac{2}{a}$, 所以 $\frac{2}{a} \geq 1$, 故 $0 < a \leq 2$.

综上, a 的取值范围为 $(0, 2]$.