2018年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文）（北京卷）

参考答案

1．A　2．D　3．B　4．B　5．D　6．C　7．C　8．D

9．-1　　10．$(1,0)$

11．1　-1（答案不唯一）　　12．4

13．3　　14．60°　$(2,+\infty)$

15．（共13分）

解：（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

$\because a_2+a_3=5\ln 2$，

$\therefore 2a_1+3d=5\ln 2$，

又$a_1=\ln 2$，$\therefore d=\ln 2$.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n\ln 2$.

（II）由（I）知$a_n=n\ln 2$，

$\because e^{a_n}=e^{n\ln 2}=e^{\ln 2^n}=2^n$，

$\therefore \{e^{a_n}\}$是以2为首项，2为公比的等比数列.

$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=e^{\ln 2}+e^{\ln 2^2}+\cdots+e^{\ln 2^n}$

$=2+2^2+\cdots+2^n$

$=2^{n+1}-2$.

$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=2^{n+1}-2$.

16.（共13分）

【解析】（Ⅰ）$f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$，

所以$f(x)$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

因为 $x\in[-\frac{\pi}{3},m]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{5\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}]$.

要使得 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},m]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$，即 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\frac{\pi}{3},m]$ 上的最大值为 1.

所以 $2m-\frac{\pi}{6}\ge\frac{\pi}{2}$，即 $m\ge\frac{\pi}{3}$.

所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

17.（共 13 分）

（Ⅰ）由题意知，样本中电影的总部数是 140+50+300+200+800+510=2000.

第四类电影中获得好评的电影部数是 200×0.25=50，

故所求概率为 $\frac{50}{2000}=0.025$.

（Ⅱ）方法一：由题意知，样本中获得好评的电影部数是

140×0.4+50×0.2+300×0.15+200×0.25+800×0.2+510×0.1

=56+10+45+50+160+51

=372.

故所求概率估计为 $1-\frac{372}{2000}=0.814$.

方法二：设“随机选取 1 部电影,这部电影没有获得好评”为事件 B.

没有获得好评的电影共有 140×0.6+50×0.8+300×0.85+200×0.75+800×0.8+510×0.9=1628 部.

由古典概型概率公式得 $P(B)=\frac{1628}{2000}=0.814$.

（Ⅲ）增加第五类电影的好评率, 减少第二类电影的好评率.

18.（共 14 分）

【解析】（Ⅰ）$\because PA=PD$，且 E 为 AD 的中点，$\therefore PE\perp AD$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore BC /\!/ AD$，

$\therefore PE\perp BC$.

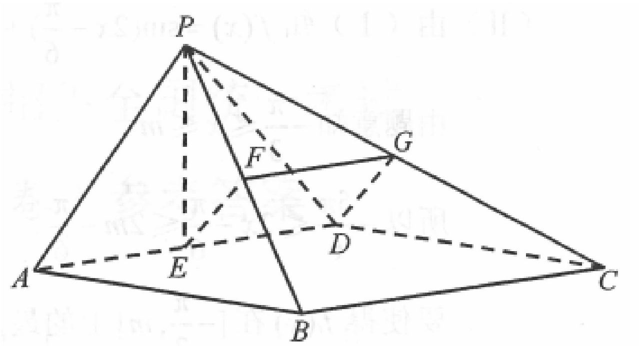
（Ⅱ）$\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore AB\perp AD$.

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore AB\perp$ 平面 PAD.

$\therefore AB\perp PD$.又 $PA\perp PD$,学科.网

$\because PD\perp$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PCD.

（Ⅲ）如图，取 PC 中点 G，连接 FG,GD.



$\because F,G$ 分别为 PB 和 PC 的中点，$\therefore FG /\!/ BC$，且 $FG=\dfrac{1}{2}BC$.

$\because$四边形 $ABCD$ 为矩形，且 E 为 AD 的中点，

$\therefore ED /\!/ BC, DE=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore ED /\!/ FG$，且 $ED=FG$，$\therefore$四边形 $EFGD$ 为平行四边形，

$\therefore EF /\!/ GD$.

又 $EF \not\subset$ 平面 PCD，$GD \subset$ 平面 PCD，

$\therefore EF /\!/$ 平面 PCD.

19. （13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]\mathrm{e}^x$，

所以 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]\mathrm{e}^x$.

$f'(2)=(2a-1)\mathrm{e}^2$，

由题设知 $f'(2)=0$，即 $(2a-1)\mathrm{e}^2=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）方法一：由（Ⅰ）得 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]\mathrm{e}^x=(ax-1)(x-1)\mathrm{e}^x$.

若 $a>1$，则当 $x\in(\dfrac{1}{a},1)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.

若 $a\le 1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$ax-1\le x-1<0$，

所以 $f'(x)>0$.

所以 1 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上可知，a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

方法二：$f'(x)=(ax-1)(x-1)e^x$.

（1）当 a=0 时，令 $f'(x)=0$ 得 x=1.

$f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

∴ $f(x)$ 在 x=1 处取得极大值，不合题意.

（2）当 a>0 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\dfrac{1}{a}, x_2=1$.

①当 $x_1=x_2$，即 a=1 时，$f'(x)=(x-1)^2e^x\geq 0$，

∴ $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，

∴ $f(x)$ 无极值，不合题意.

②当 $x_1>x_2$，即 0<a<1 时，$f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

∴ $f(x)$ 在 x=1 处取得极大值，不合题意.

③当 $x_1<x_2$，即 a>1 时，$f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

∴ $f(x)$ 在 x=1 处取得极小值，即 a>1 满足题意.

（3）当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{a},x_2=1$.

$f'(x),f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不合题意.

综上所述，a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

20.（共 14 分）

【解析】（Ⅰ）由题意得 $2c=2\sqrt{2}$，所以 $c=\sqrt{2}$，

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（Ⅱ）设直线 AB 的方程为 $y=x+m$，

由 $\begin{cases} y=x+m \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$，

则 $\varDelta=36m^2-4\times4(3m^2-3)=48-12m^2>0$，即 $m^2<4$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{4}$，

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{4-m^2}}{2}$，

易得当 $m^2=0$ 时，$|AB|_{\max}=\sqrt{6}$，故 $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{6}$.

（Ⅲ）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

则 $x_1^2+3y_1^2=3$ ①，$x_2^2+3y_2^2=3$ ②，

又 $P(-2,0)$，所以可设 $k_1 = k_{PA} = \dfrac{y_1}{x_1+2}$，直线 PA 的方程为 $y = k_1(x+2)$，

由 $\begin{cases} y = k_1(x+2) \\ \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $(1+3k_1^2)x^2 + 12k_1^2 x + 12k_1^2 - 3 = 0$，

则 $x_1 + x_3 = -\dfrac{12k_1^2}{1+3k_1^2}$，即 $x_3 = -\dfrac{12k_1^2}{1+3k_1^2} - x_1$，

又 $k_1 = \dfrac{y_1}{x_1+2}$，代入①式可得 $x_3 = \dfrac{-7x_1-12}{4x_1+7}$，所以 $y_3 = \dfrac{y_1}{4x_1+7}$，

所以 $C(\dfrac{-7x_1-12}{4x_1+7}, \dfrac{y_1}{4x_1+7})$，同理可得 $D(\dfrac{-7x_2-12}{4x_2+7}, \dfrac{y_2}{4x_2+7})$.

故 $\overrightarrow{QC} = (x_3 + \dfrac{7}{4}, y_3 - \dfrac{1}{4})$，$\overrightarrow{QD} = (x_4 + \dfrac{7}{4}, y_4 - \dfrac{1}{4})$，

因为 Q,C,D 三点共线，所以 $(x_3 + \dfrac{7}{4})(y_4 - \dfrac{1}{4}) - (x_4 + \dfrac{7}{4})(y_3 - \dfrac{1}{4}) = 0$，

将点 C,D 的坐标代入化简可得 $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$，即 $k = 1$.