

参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。

- (1) C (2) C (3) A (4) B
(5) D (6) A (7) A (8) C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 30 分。

- (9) $4 - i$ (10) e (11) $\frac{1}{3}$
(12) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (13) $\frac{1}{4}$ (14) $[\frac{1}{8}, 2]$

三、解答题

(15) 本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识。考查运用概率知识解决简单实际问题的能力。满分 13 分。

(I) 解：由已知，甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数之比为 3:2:2，由于采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学，因此应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取 3 人，2 人，2 人。

(II) (i) 解：从抽出的 7 名同学中随机抽取 2 名同学的所有可能结果为
 $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{A, G\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{B, G\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{C, G\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{D, G\}, \{E, F\}, \{E, G\}, \{F, G\}$ ，共 21 种。

(ii) 解：由 (I)，不妨设抽出的 7 名同学中，来自甲年级的是 A, B, C ，来自乙年级的是 D, E ，来自丙年级的是 F, G ，则从抽出的 7 名同学中随机抽取的 2 名同学来自同一年级的所有可能结果为 $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{D, E\}, \{F, G\}$ ，共 5 种。学@科网

所以，事件 M 发生的概率为 $P(M) = \frac{5}{21}$ 。

(16) 本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力。满分 13 分。

(I) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，可得 $b \sin A = a \sin B$ ，又由 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，得 $a \sin B = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，即 $\sin B = \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，可得 $\tan B = \sqrt{3}$ 。又因为 $B \in (0, \pi)$ ，可得 $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(II) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a=2, c=3, B=\frac{\pi}{3}$ ，有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 7$ ，故 $b = \sqrt{7}$ 。

由 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，可得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 。因为 $a < c$ ，故 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}$ 。因此 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ，

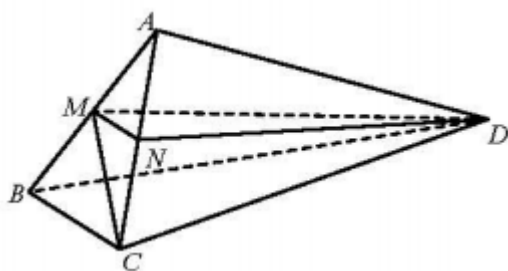
$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}.$$

$$\text{所以, } \sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

(17) 本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面垂直等基础知识. 考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力. 满分 13 分.

(I) 由平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 平面 $ABC \cap$ 平面 $ABD = AB$, $AD \perp AB$, 可得 $AD \perp$ 平面 ABC , 故 $AD \perp BC$.

(II) 解: 取棱 AC 的中点 N , 连接 MN , ND . 又因为 M 为棱 AB 的中点, 故 $MN \parallel BC$. 所以 $\angle DMN$ (或其补角) 为异面直线 BC 与 MD 所成的角.



在 $\text{Rt}\triangle DAM$ 中, $AM=1$, 故 $DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{13}$. 因为 $AD \perp$ 平面 ABC , 故 $AD \perp AC$.

在 $\text{Rt}\triangle DAN$ 中, $AN=1$, 故 $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = \sqrt{13}$.

在等腰三角形 DMN 中, $MN=1$, 可得 $\cos \angle DMN = \frac{\frac{1}{2}MN}{DM} = \frac{\sqrt{13}}{26}$.

所以, 异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{26}$.

(III) 解: 连接 CM . 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, M 为边 AB 的中点, 故 $CM \perp AB$, $CM = \sqrt{3}$. 又因为平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 而 $CM \subset$ 平面 ABC , 故 $CM \perp$ 平面 ABD . 所以, $\angle CDM$ 为直线 CD 与平面 ABD 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle CAD$ 中, $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = 4$.

在 $\text{Rt}\triangle CMD$ 中, $\sin \angle CDM = \frac{CM}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以, 直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(18) 本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识. 考查数列求和的基本方

法和运算求解能力.满分 13 分.

(I) 解: 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 由 $b_1=1, b_3=b_2+2$, 可得 $q^2 - q - 2 = 0$.

因为 $q > 0$, 可得 $q = 2$, 故 $b_n = 2^{n-1}$. 所以 $T_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 由 $b_4 = a_3 + a_5$, 可得 $a_1 + 3d = 4$. 由 $b_5 = a_4 + 2a_6$, 可得 $3a_1 + 13d = 16$, 从而 $a_1 = 1, d = 1$, 故 $a_n = n$, 所以 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(II) 解: 由 (I), 知 $T_1 + T_2 + \dots + T_n = (2^1 + 2^3 + \dots + 2^n) - n = 2^{n+1} - n - 2$.

由 $S_n + (T_1 + T_2 + \dots + T_n) = a_n + 4b_n$ 可得 $\frac{n(n+1)}{2} + 2^{n+1} - n - 2 = n + 2^{n+1}$,

整理得 $n^2 - 3n - 4 = 0$, 解得 $n = -1$ (舍), 或 $n = 4$. 所以 n 的值为 4. 学&科网

(19) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力, 以及用方程思想解决问题的能力. 满分 14 分.

(I) 解: 设椭圆的焦距为 $2c$, 由已知得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$, 又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $2a = 3b$. 由

$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$, 从而 $a = 3, b = 2$.

所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(II) 解: 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 M 的坐标为 (x_2, y_2) , 由题意, $x_2 > x_1 > 0$,

点 Q 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$. 由 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍, 可得 $|PM| = 2|PQ|$,

从而 $x_2 - x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$, 即 $x_2 = 5x_1$.

易知直线 AB 的方程为 $2x + 3y = 6$, 由方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ y = kx, \end{cases}$ 消去 y , 可得 $x_2 = \frac{6}{3k+2}$. 由方程组

$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx, \end{cases}$ 消去 y , 可得 $x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$. 由 $x_2 = 5x_1$, 可得 $\sqrt{9k^2+4} = 5(3k+2)$, 两边平方, 整理得

$18k^2 + 25k + 8 = 0$, 解得 $k = -\frac{8}{9}$, 或 $k = -\frac{1}{2}$.

当 $k = -\frac{8}{9}$ 时, $x_2 = -9 < 0$, 不合题意, 舍去; 当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $x_2 = 12, x_1 = \frac{12}{5}$, 符合题意.

所以, k 的值为 $-\frac{1}{2}$.

(20) 本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法, 考查函数思想和分类讨论思想, 考查综合分析问题和解决问题的能量, 满分 14 分.

(I) 解: 由已知, 可得 $f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$, 故 $f'(x)=3x-1$, 因此 $f(0)=0$, $f'(0)=-1$, 又因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, 故所求切线方程为 $x+y=0$.

(II) 解: 由已知可得

$$f(x)=(x-t_2+3)(x-t_2)(x-t_2-3)=(x-t_2)^3-9(x-t_2)=x^3-3t_2x^2+(3t_2^2-9)x-t_2^2+9t_2.$$

故 $f'(x)=3x^2-6t_2x+3t_2^2-9$. 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=t_2-\sqrt{3}$, 或 $x=t_2+\sqrt{3}$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化如下表:

x	$(-\infty, t_2-\sqrt{3})$	$t_2-\sqrt{3}$	$(t_2-\sqrt{3}, t_2+\sqrt{3})$	$t_2+\sqrt{3}$	$(t_2+\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(t_2-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^3-9\times(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$; 函数小值为 $f(t_2+\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-9\times(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$.

(III) 解: 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程 $(x-t_2+d)(x-t_2)(x-t_2-d)+(x-t_2)+6\sqrt{3}=0$ 有三个互异的实数解, 令 $u=x-t_2$, 可得 $u^3+(1-d^2)u+6\sqrt{3}=0$.

设函数 $g(x)=x^3+(1-d^2)x+6\sqrt{3}$, 则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y=g(x)$ 有三个零点.

$$g'(x)=3x^2+(1-d^2).$$

当 $d^2 \leq 1$ 时, $g'(x) \geq 0$, 这时 $g'(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 不合题意.

当 $d^2 > 1$ 时, $g'(x)=0$, 解得 $x_1=-\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$, $x_2=\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$.

易得, $g(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递增, 在 $[x_1, x_2]$ 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增,

$$g(x) \text{ 的极大值 } g(x_1) = g\left(-\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3} > 0.$$

$$g(x) \text{ 的极小值 } g(x_2) = g\left(\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3}.$$

若 $g(x_2) \geq 0$ ，由 $g(x)$ 的单调性可知函数 $y=f(x)$ 至多有两个零点，不合题意。

若 $g(x_2) < 0$ ，即 $(d^2-1)^{\frac{3}{2}} > 27$ ，也就是 $|d| > \sqrt{10}$ ，此时 $|d| > x_2$ ， $g(|d|) = |d| + 6\sqrt{3} > 0$ ，且

$-2|d| < x_1$ ， $g(-2|d|) = -6|d|^3 - 2|d| + 6\sqrt{3} < -62\sqrt{10} + 6\sqrt{3} < 0$ ，从而由 $g(x)$ 的单调性，可知函数

$y = g(x)$ 在区间 $(-2|d|, x_1)$, (x_1, x_2) , $(x_2, |d|)$ 内各有一个零点，符合题意. 学科……网

所以 d 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$.