数学Ⅱ(附加题)参考答案

21．【选做题】

A．[选修 4—1：几何证明选讲]

本小题主要考查圆与三角形等基础知识，考查推理论证能力．满分 10 分．

证明：连结 OC．因为 PC 与圆 O 相切，所以 $OC\perp PC$．

又因为 $PC=2\sqrt{3}$，$OC=2$，

所以 $OP=\sqrt{PC^2+OC^2}=4$．

又因为 $OB=2$，从而 B 为 Rt△OCP 斜边的中点，所以 $BC=2$．

B．[选修 4—2：矩阵与变换]

本小题主要考查矩阵的运算、线性变换等基础知识，考查运算求解能力．满分 10 分．

解：（1）因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A})=2\times2-1\times3=1\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$．

（2）设 $P(x，y)$，则 $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$，

因此，点 P 的坐标为$(3，-1)$．

C．[选修 4—4：坐标系与参数方程]

本小题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查运算求解能力．满分 10 分．

解：因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，

所以曲线 C 的圆心为（2，0），直径为 4 的圆．

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，

则直线 l 过 A（4，0），倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，

所以 A 为直线 l 与圆 C 的一个交点．

设另一个交点为 B，则 $\angle OAB=\frac{\pi}{6}$．

连结 OB，因为 OA 为直径，从而 $\angle OBA=\frac{\pi}{2}$，

所以 $AB=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$.

因此，直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

D．[选修 4—5：不等式选讲]

本小题主要考查柯西不等式等基础知识，考查推理论证能力．满分 10 分．

证明：由柯西不等式，得 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\geq(x+2y+2z)^2$.

因为 $x+2y+2z=6$ ，所以 $x^2+y^2+z^2\geq4$ ，

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 时，不等式取等号，此时 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{4}{3}$ $z=\frac{4}{3}$ ，

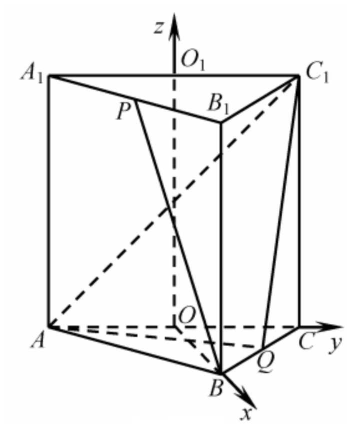
所以 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 4．学&科网

22．【必做题】**本小题主要考查空间向量、异面直线所成角和线面角等基础知识，考查运用空间向量解决问题的能力．满分 10 分．**

解：如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，设 AC，A_1C_1 的中点分别为 O，O_1，则 $OB\perp OC$，$OO_1\perp OC$，$OO_1\perp OB$，以 $\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}\}$ 为基底，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

因为 $AB=AA_1=2$，

所以 $A(0,-1,0),B(\sqrt{3},0,0),C(0,1,0),A_1(0,-1,2),B_1(\sqrt{3},0,2),C_1(0,1,2)$.



（1）因为 P 为 A_1B_1 的中点，所以 $P(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2)$ ，

从而 $\overrightarrow{BP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2),\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$ ，

故 $|\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{|-1+4|}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

因此，异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

（2）因为 Q 为 BC 的中点，所以 $Q(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，

因此 $\overrightarrow{AQ}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$， $\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}$=（x，y，z）为平面 AQC_1 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

不妨取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$，

设直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times 2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

23.【必做题】本小题主要考查计数原理、排列等基础知识，考查运算求解能力和推理论证能力．满分 10 分．学&科网

解：（1）记 $\tau(abc)$ 为排列 abc 的逆序数，对 1，2，3 的所有排列，有

$\tau(123)=0$，$\tau(132)=1$，$\tau(213)=1$ $\tau(231)=2$ $\tau(312)=2$ $\tau(321)=3$，

所以 $f_3(0)=1$，$f_3(1)=f_3(2)=2$.

对 1，2，3，4 的排列，利用已有的 1，2，3 的排列，将数字 4 添加进去，4 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_4(2)=f_3(2)+f_3(1)+f_3(0)=5$.

（2）对一般的 n（$n\geq 4$）的情形，逆序数为 0 的排列只有一个：12…n，所以 $f_n(0)=1$.

逆序数为 1 的排列只能是将排列 12…n 中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，所以 $f_n(1)=n-1$.

为计算 $f_{n+1}(2)$，当 1，2，…，n 的排列及其逆序数确定后，将 n+1 添加进原排列，n+1 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_{n+1}(2)=f_n(2)+f_n(1)+f_n(0)=f_n(2)+n$.

当 $n \geq 5$ 时，

$$f_n(2)=[f_n(2)-f_{n-1}(2)]+[f_{n-1}(2)-f_{n-2}(2)]+\ldots+[f_5(2)-f_4(2)]+f_4(2)$$

$$=(n-1)+(n-2)+\ldots+4+f_4(2)=\frac{n^2-n-2}{2},$$

因此，$n \geq 5$ 时，$f_n(2)=\dfrac{n^2-n-2}{2}$．