2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1、当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$

A. 1.　　　　B. 2.

C. 3.　　　　D. 4.

【答案】C

【解析】$x-\tan x\sim -\dfrac{x^3}{3}$，所以选 C.

2、设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, x,, 0, \\ x\ln x, x>0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

A. 可导点，极值点.　　　　B. 不可导点，极值点.

C. 可导点，非极值点.　　　　D. 不可导点，非极值点.

【答案】B

【解析】 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^-} x|x|=0$，所以连续.

又 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$,所以不可导.

$f'(x)=\begin{cases} -2x, & x<0, \\ \ln x+1, & x>0, \end{cases}$ $f'(x)$ 在 0 的去心左右领域内异号,所以是极值点.选 B.

3、设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$.　　　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}})$.　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

【答案】D

【解析】取 $u_n=-\dfrac{1}{\ln n}$，则 A 不对；取 $u_n=-\dfrac{1}{n}$，则 B、C 不对；

而 D 选项: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)=(u_2^2-u_1^2)+(u_3^2-u_2^2)+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}^2-u_1^2$,u_n 存在极限.

选 D.

4、设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$.如果对上半平面 $(y>0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，

那么函数 $P(x,y)$ 可取为

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$.　　B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.

C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.　　D. $x-\dfrac{1}{y}$.

【答案】D

【解析】曲线积分与路径无关，则连续的偏导数 $P_y'=Q_x'=\dfrac{1}{y^2}$，所以 C 不选($x=0$ 不连续)，选 D.

5、设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵， $\boldsymbol{E}$ 是3阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ ，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

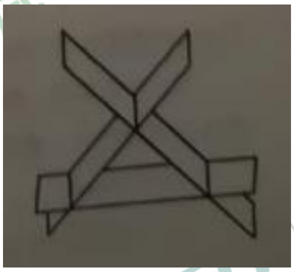
【答案】C

【解答】由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ ，可知矩阵的特征值满足方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$，解得， $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$，可知 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$ ，所以规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故答案选 C.

6、如图所示，有3张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$ ，则



A. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.

B. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

C. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

D. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$.

【答案】A.

【解答】因为3张平面无公共交线，则说明方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解，即 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

又因为3张平面两两相交，且交线相互平行，则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有一个线性无关解，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$. 故答案选 A.

7、设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 充分必要条件是

A. $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B).$　　B. $P(AB)=P(A)P(B).$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A}).$　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B}).$

【答案】C

【解析】$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})\Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)=P(B)$；选 C.

8、设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$

A. 与 μ 无关，而与 σ^2 有关.　　B. 与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

C. 与 μ，σ^2 都有关.　　D. 与 μ，σ^2 都无关.

【答案】A

【解析】$X-Y\sim N(0,2\sigma^2$，所以 $P\{|X-Y|<1\}=\Phi(\frac{1-0}{\sqrt{2}\sigma})=\Phi(\frac{-1-0}{\sqrt{2}\sigma})=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$；选 A

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9、设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$___________.

【答案】$\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

【解答】因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)\cos y+x$，

所以 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

10、微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$___________.

【答案】$y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

【解答】因为 $2yy'-y^2-2=0$，可得 $\dfrac{2y}{y^2+2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，两边积分可得 $\ln(y^2+2)=x+C$.

代入 $y(0)=1$，得 $C=\ln 3$，故 $y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

11、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$___________.

【答案】$\cos\sqrt{x}$.

12、设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4\,(z..0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$___________.

【答案】$\dfrac{32}{3}$.

【解答】$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\text{剜}4,y\ \ 0}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sin\theta r\mathrm{d}r=\dfrac{32}{3}$.

13、设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵．若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为___________.

【答案】$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

【解答】由条件$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以$r(\boldsymbol{A})=2$.

由此可知方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系只包含一个线性无关解向量. 再由$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$可得

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$，所以可取$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$为一个非零解，故通解为$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$（$k$为任意常数）.

14、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2,\\0,其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$__________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解答】由条件可得$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$，且可求得分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0,x<0,\\\dfrac{x^2}{4},0\leqslant x<2,\\1,\ x\geqslant 2.\end{cases}$$ 故可得$P\{F(X)>EX-1\}=P\{F(X)>\dfrac{1}{3}\}=\dfrac{2}{3}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15、（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）求曲线 $y=y(x)$ 凹凸区间及拐点.

【解】（1）可知方程为一阶线性方程，由通解公式可得通解为

$y(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}[x+C]$，再由 $y(0)=0$，解得 $C=0$，故特解为 $y(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

（2）因为 $y'=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$， $y''=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)$，

由 $y''=0$ 得 $x=0,x=\sqrt{3},x=-\sqrt{3}$，再由二阶导数的符号可得

凹区间为 $(-\sqrt{3},0)\mathrm{U}(\sqrt{3},+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$，拐点为 $(0,0),(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}),(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$.

16、（本题满分 10 分）

设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求 a,b；

（2）求曲面 $z=2+ax^2+by^2\ (z..0)$ 的面积.

解:（1） $z_x'=2ax,z_y'=2by$；

方向导数沿梯度的方向时最大,此时为梯度的模;而梯度

$$grad\ z(3,4)=(z_x',z_y')\Big|_{(3,4)}=(6a,8b)\text{，}$$

所以 $\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}>0$,且 $36a^2+64b^2=100$,解得 $a=b=-1$.

(2) $z=2-x^2-y^2$,所以所求面积

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2裂2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\ \ 2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{3}.$$

17、求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x\left(x..0\right)$ 与 x 轴之间图形的面积

解:设在区间$[n\pi,(n+1)\pi]$ $(n=0,1,2,\cdots)$上所围的面积记为u_n,则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x;$$

记$I=\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$,则$I=-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\cos x=-(\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-(\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-I,$$

所以$I=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)+C$;

因此$u_n=(-1)^n(-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi})$;

(这里需要注意$\cos n\pi=(-1)^n$)

因此所求面积为$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$.

18、设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\left(n=0,1,2\cdots\right)$

（1）证明数列$\left\{a_n\right\}$单调递减；且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3\cdots\right)$

(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

(1)证明: $a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$,所以$\left\{a_n\right\}$单调递减.

$$a_n=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}[x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx^{n-1}]$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}(\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n),$$

从而有$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3\cdots\right)$;

(2)因为$\dfrac{a_n}{a_{n-2}}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\dfrac{a_n}{a_n}=1$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$,由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1.$$

19、设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2\ (0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

解：设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性知，$\bar{x}=0$，且有

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12},$$

令 $\begin{cases}x=u,\\ y=v-w+1,\\ z=1-w,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-1$，所以，

$$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{u^2+v^2\le w^2}(v-w+1)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint\limits_{u^2+v^2\le w^2}(v-w+1)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\int_0^1(1-w)\mathrm{d}w\iint\limits_{u^2+v^2\le w^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\pi\int_0^1 w^2(1-w)\mathrm{d}w=\frac{\pi}{12}.$$

故 $\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{4}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{4}$. 因此形心坐标为 $(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$.

20、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^T$ 为 R^3 的一个基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^T$ 在这个基下的坐标 $(b,c,1)^T$.

(1)求 a, b,c;

（2）证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,$ 的过渡矩阵.

(1)解:易知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则其行列式不为零,即 $a\ne 4$.

由 $b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 可得 $\begin{cases}1+b+c=1,\\ 2b+3c+a=1,\\ b+2c+3=1,\end{cases}$ 从而

$$a=3,b=2,c=-2.$$

(2)因为$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=2\neq 0$,因为也是$R^3$的一个基;

设过渡矩阵为P,则有$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,)$,从而

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$$

21.已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似.

（1） 求x,y;

（2） 求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$.

解:(1)相似矩阵有相同的特征值,因此有$\begin{cases}-2+x-2=2-1+y,\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$

又$|\boldsymbol{A}|=-2(4-2x),|\boldsymbol{B}|=-2y$,所以$x=3,y=-2$.

(2)易知B的特征值为$2,-1,-2$;因此

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$,取$\xi_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$,取$\xi_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}4&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$,取$\xi_3=(-1,2,4)^{\mathrm{T}}$

令$P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,则有$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$;

同理可得,对于矩阵 $\boldsymbol{B}$,有矩阵 $P_2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$,所以

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$,即 $B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$,所以

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

22、设随机变量 X 与 Y 相互独立， X 服从参数为 1 的指数分布， Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p$, $P(Y=1)=1-p$,($0<p<1$)，令 $Z=XY$.

（1）　求 Z 的概率密度;

（2）　p 为何值时， X 与 Z 不相关;

（3）　X 与 Z 是否相互独立?

【解】（1） Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P(XY\leq z)=P(Y=-1,X\geq -z)+P(Y=1,X\leq z)$ ，因为 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

因此， $F_Z(z)=p[1-F_X(-z)]+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ (1-p)(1-\mathrm{e}^{-z}), & z\geq 0.\end{cases}$

所以， Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\geq 0.\end{cases}$

（2）当 $Cov(X,Z)=EXZ-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=0$ 时， X 与 Z 不相关. 因为 $DX=1$, $EY=1-2p$ ，故 $p=\dfrac{1}{2}$.

（3）不独立. 因为

$P(0\leq X\leq 1,Z\leq 1)=P(0\leq X\leq 1,XY\leq 1)=P(0\leq X\leq 1)$,

而 $P(Z\leq 1)=F_Z(1)=(1-p)(1-\mathrm{e}^{-1})\neq 1$ ，故 $P(0\leq X\leq 1,Z\leq 1)\neq P(0\leq X\leq 1)\cdot P(Z\leq 1)$,

所以 X 与 Z 不独立.

23、（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

【解答】（1）由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,$$

得 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

（2）设似然函数 $L(\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

取对数 $\ln L(\sigma^2)=\sum\limits_{n=1}^{n}[\ln\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}-\dfrac{1}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}]$；

求导数 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}[-\dfrac{1}{2\sigma^2}+\dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}]=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$，

令导数为零解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.