

$|u_n v_n| = \left| nu_n \cdot \frac{v_n}{n} \right|$, $|nu_n|$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

5、设 A 是四阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有 2 个向量, 则 A^* 的秩是 ()

A.0 B.1 C.2 D.3

【答案】 A.

【解析】 由于方程组基础解系中只有 2 个向量, 则 $r(A) = 2$, $r(A) < 3$, $r(A^*) = 0$.

6、设 A 是 3 阶实对称, E 是 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$ 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为 ()

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

【答案】 C.

【解析】 $\lambda^2 + \lambda = 2$, 则 λ 只能为 -2 或 1, 又由于 $|A| = 4$, 则特征值分别为 -2, -2, 1, 则二次型的规范形为

$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

7、设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 充分必要条件是

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. B. $P(AB) = P(A)P(B)$.
C. $P(\overline{AB}) = P(\overline{BA})$. D. $P(AB) = P(\overline{AB})$.

8、设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.
C. 与 μ, σ^2 都有关. D. 与 μ, σ^2 都无关.

9、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]^n =$ _____

【答案】 e^{-1} .

【解析】 $\left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} \right]^n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-1}$.

10、曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$) 的拐点坐标为 _____

【答案】 $(\pi, -2)$.

【解析】 令 $y'' = -x \sin x = 0$, 可得 $x = \pi$, 因此拐点坐标为 $(\pi, -2)$.

11、已知 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$ ，则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx =$ _____

【答案】 $\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.

【解析】依题意， $f'(x) = \sqrt{1+x^4}$ 且 $f(1) = 0$. 因此，

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx^3 = \frac{1}{3} \left[x^3 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx \right] = \frac{1}{18}(1-2\sqrt{2}).$$

12、A、B 两商品的价格分别为 P_A 、 P_B ，需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$ ，

$P_A = 10$ ， $P_B = 20$ ，求 A 商品对自身价格的需求弹性 $\eta_{AA} =$ _____ ($h > 0$).

【答案】 0.4.

【解析】因为 $\eta_{AA} = -\frac{P_A}{Q_A} \cdot \frac{dQ_A}{dP_A} = -\frac{P_A}{Q_A} (-2P_A - P_B)$ ，将 $P_A = 10$ ， $P_B = 20$ ， $Q_A = 1000$ 代入，可得

$$\eta_{AA} = \frac{10}{1000} \cdot 400 = 0.4.$$

13、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ ， $Ax = b$ 有无穷多解，求 $a =$ _____

【答案】 1.

【解析】因为 $Ax = b$ 有无穷多解，故 $r(A) = r(A, b) < 3$ ，对矩阵 (A, b) 作初等行变换，因为

$$(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 \end{pmatrix},$$

故 $a^2 - 1 = a - 1 = 0$ ，因此 $a = 1$.

14、 X 为连续型随机变量，概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ， $F(x)$ 为 X 的分布函数， EX 为 X 的期望，求

$P\{F(X) > EX - 1\} =$ _____

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解答】由条件可得 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}$ ，且可求得分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

故可得 $P\{F(X) > EX - 1\} = P\{F(X) > \frac{1}{3}\} = \frac{2}{3}$.

15、已知 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

【答案】 $f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(\ln x + 1); & x > 0 \\ e^x(x + 1); & x < 0 \end{cases}$,

极大值 $f(0) = 1$. 极小值 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{2}{e}}$.

【解析】解：当 $x > 0$ 时：

$$f'(x) = (e^{2x \ln x} - 1)' = (e^{2x \ln x})' = e^{2x \ln x} (2 \ln x + 2) = 2x^{2x} (\ln x + 1)$$

当 $x < 0$ ：

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$$

因此 $f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(\ln x + 1); & x > 0 \\ e^x(x + 1); & x < 0 \end{cases}$

当 $x = 0$ ：

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = -\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 0$$

当 $x > 0$ 时, $f'(0) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x < 0$ 时, $f'(0) > 0$, $f(x)$ 单调递增

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值, 且 $f(0) = 1$.

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = -1$ 及 $x = \frac{1}{e}$. 又 $f''(-1) > 0$, $f''(\frac{1}{e}) > 0$, 故极小值为 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{2}{e}}$.

16、已知 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【答案】 $1 - 3f''_{11} - f''_{22}$.

【解析】依题意知,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - f'_1(x + y, x - y) - f'_2(x + y, x - y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x - f'_1(x + y, x - y) + f'_2(x + y, x - y).$$

因为 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 故 $f''_{12} = f''_{21}$, 因此,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -(f''_{11} + f''_{12}) - (f''_{21} + f''_{22}) = -f''_{11} - 2f''_{12} - f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 - (f''_{11} - f''_{12}) - (f''_{21} - f''_{22}) = 1 - f''_{11} + f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -(f''_{11} - f''_{12}) + (f''_{21} - f''_{22}) = -f''_{11} + 2f''_{12} - f''_{22}.$$

所以, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 - 3f''_{11} - f''_{22}.$

17、已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$, 且满足 $y(1) = \sqrt{e}$.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 若 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求区域 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

【答案】(1) $y(x) = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$. (2)

【解析】(1) $y(x) = e^{-\int -x dx} \left(C + \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\int -x dx} \right) = e^{\frac{x^2}{2}} (C + \sqrt{x}).$

因为 $y(1) = \sqrt{e}$, 故 $C = 0$, 所以 $y(x) = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) 由旋转体体积公式,

$$V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}})^2 dx = \pi \int_1^2 xe^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$

18、求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解: 设在区间 $[n\pi, (n+1)\pi]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 上所围的面积记为 u_n , 则

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx;$$

记 $I = \int e^{-x} \sin x dx$, 则 $I = -\int e^{-x} d \cos x = -(e^{-x} \cos x - \int \cos x de^{-x})$

$$= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} d \sin x = -e^{-x} \cos x - (e^{-x} \sin x - \int \sin x de^{-x})$$

$$= -e^{-x} (\cos x + \sin x) - I,$$

所以 $I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C$;

$$\text{因此 } u_n = (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x} (\cos x + \sin x) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{1}{2} (e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi});$$

(这里需要注意 $\cos n\pi = (-1)^n$)

$$\text{因此所求面积为 } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\pi}-1}.$$

19、设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n=0,1,2,\dots)$

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减; 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2,3,\dots)$

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(1) 证明: $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^{n+1} (x-1) \sqrt{1-x^2} dx < 0$, 所以 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n-1} d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} [x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}] \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx^{n-1} \\ &= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \left(\int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \right) \\ &= \frac{n-1}{3} (a_{n-2} - a_n), \end{aligned}$$

从而有 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2,3,\dots)$;

(2) 因为 $\frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$, 由夹逼准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1.$$

20、已知向量组 $I: \alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$

$$II: \beta_1 = (1, 1, a+3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1-a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$$

若向量组 I 与 II 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

【答案】 $a \neq -1$;

$a=1$ 时, $\beta_3 = (3-k)\alpha_1 + (-2+k)\alpha_2 + k\alpha_3$ (k 为任意常数);

当 $a \neq \pm 1$ 时, $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

【解析】 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 所以, $|A| = 1 - a^2$, $|B| = 2(a^2 - 1)$.

因向量组 I 与 II 等价, 故 $r(A) = r(B) = r(A, B)$, 对矩阵 (A, B) 作初等行变换. 因为

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时, $r(A) = r(B) = r(A, B) = 2$; 当 $a=-1$ 时, $r(A) = r(B) = 1$, 但 $r(A, B) = 3$; 当 $a \neq \pm 1$ 时,

$r(A) = r(B) = r(A, B) = 3$. 综上, 只需 $a \neq -1$ 即可.

因为对列向量构成的矩阵作初等行变换, 不改变线性关系.

① 当 $a=1$ 时, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ 的等价方程组为 $\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_3, \\ x_2 = -2 + x_3. \end{cases}$ 故

$\beta_3 = (3-k)\alpha_1 + (-2+k)\alpha_2 + k\alpha_3$ (k 为任意常数);

② 当 $a \neq \pm 1$ 时, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 所以 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

21 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y ;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

解: (1) 相似矩阵有相同的特征值, 因此有 $\begin{cases} -2+x-2 = 2-1+y, \\ |A| = |B|, \end{cases}$

又 $|A| = -2(4-2x)$, $|B| = -2y$, 所以 $x=3, y=-2$.

(2) 易知 B 的特征值为 $2, -1, -2$; 因此

$$A - 2E \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{取 } \xi_1 = (-1, 2, 0)^T,$$

$$A + E \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{取 } \xi_2 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$A + 2E \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{取 } \xi_3 = (-1, 2, 4)^T$$

$$\text{令 } P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \text{则有 } P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{同理可得,对于矩阵 } B, \text{有矩阵 } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{所以}$$

$$P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2, \text{即 } B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}, \text{所以}$$

$$P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

22、设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y = -1) = p$,

$P(Y = 1) = 1 - p, (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$.

- (1) 求 Z 的概率密度;
- (2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;
- (3) X 与 Z 是否相互独立?

【答案】(1) $f_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z < 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$ (2) $p = \frac{1}{2}$; (3) 不独立.

【解析】(1) Z 的分布函数为 $F_Z(z) = P(XY \leq z) = P(Y = -1, X \geq -z) + P(Y = 1, X \leq z)$, 因为 X 与 Y 相互独立,

且 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

因此, $F_Z(z) = p[1 - F_X(-z)] + (1-p)F_X(z) = \begin{cases} pe^z, & z < 0, \\ (1-p)(1-e^{-z}), & z \geq 0. \end{cases}$

所以, Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z < 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$

(2) 当 $Cov(X, Z) = EXZ - EX \cdot EZ = EX^2 \cdot EY - (EX)^2 \cdot EY = DX \cdot EY = 0$ 时, X 与 Z 不相关. 因为 $DX = 1$,

$EY = 1 - 2p$, 故 $p = \frac{1}{2}$.

(3) 不独立. 因为

$P(0 < X < 1, Z > 1) = P(0 < X < 1, XY > 1) = P(0 < X < 1)$,

而 $P(Z > 1) = F_Z(1) = (1-p)(1-e^{-1}) \neq 1$, 故 $P(0 < X < 1, Z > 1) \neq P(0 < X < 1) \cdot P(Z > 1)$,

所以 X 与 Z 不独立.

23. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$$

μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 简单随机样本.

(1) 求 A ;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

【解答】(1) 由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 即

$$\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{A}{\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = A \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$\text{得 } A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

(2) 设似然函数 $L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

取对数 $\ln L(\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left[\ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$;

$$\text{求导数 } \frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4},$$

$$\text{令导数为零解得 } \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

$$\text{故 } \sigma^2 \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$