2019 考研数学三真题及答案解析

1、当$x\to 0$时，若$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$（ ）

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

【答案】 C.

【解析】当$x\to 0$时，$x-\tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$，则$k$=3.

2．已知方程$x^5-5x+k=0$有3个不同的实根，则k的取值范围为（ ）

A、 $(-\infty,-4)$ B、$(4,+\infty)$ C、$\{-4,4\}$ D、$(-4,4)$

【答案】 D.

【解析】令 $f(x)=x^5-5x+k$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm 1$，当$x<-1$时，$f'(x)>0$，当$-1<x<1$时，$f'(x)<0$，当$x>1$时，$f'(x)>0$，又由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，方程要有三个不等实根，只需要 $f(-1)=4+k>0$，$f(1)=-4+k<0$，因此k的取值范围为$-4<k<4$.

3．已知微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的通解为$y=(C_1+C_2)e^{-x}+e^x$，则a,b,c依次为（ ）

A、$1,0,1$ B、 $1,0,2$ C、 $2,1,3$ D、 $2,1,4$

【答案】 D.

【解析】由通解形式知，$\lambda_1=\lambda_2=-1$，故特征方程为$(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1=0$，所以$a=2,b=1$，又由于$\bar{y}=e^x$是$y''+2y'+y=ce^x$的特解，代入得$c=4$.

4、若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n}{n}$条件收敛，则（ ）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$条件收敛 B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛

C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛 D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散

【答案】 B.

【解析】由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$条件收敛知，$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}=0$，故当$n$充分大时，$\left|\frac{v_n}{n}\right|\leq 1$. 所以，

$|u_nv_n|=\left|nu_n\cdot\frac{v_n}{n}\right|\leq |nu_n|$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}nu_n$绝对收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛.

5、设$\boldsymbol{A}$是四阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中只有 2 个向量，则$\boldsymbol{A}^*$的秩是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

【答案】 A.

【解析】由于方程组基础解系中只有 2 个向量，则$r(A)=2$，$r(A)<3$，$r(A^*)=0$.

6、设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称，$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵. 若$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$且$|\boldsymbol{A}=4|$，则二次型$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$的规范形为(　　)

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】 C.

【解析】$\lambda^2+\lambda=2$，则λ只能为-2或1，又由于$|\boldsymbol{A}|=4$，则特征值分别为$-2,-2,1$，则二次型的规范形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

7、设A,B为随机事件，则$P(A)=P(B)$充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$.　　D. $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$.

【答案】C

【解析】$P(A\bar{B})=P(B\bar{A})\Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)=P(B)$；选 C.

8、设随机变量X和Y相互独立，且都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-Y|<1\}$

A. 与μ无关，而与σ^2有关.　　B. 与μ有关，而与σ^2无关.

C. 与μ，σ^2都有关.　　D. 与μ，σ^2都无关.

【答案】A

【解析】$X-Y \sim N(0,2\sigma^2$，所以$P\{|X-Y|<1\}=\Phi(\frac{1-0}{\sqrt{2}\sigma})=\Phi(\frac{-1-0}{\sqrt{2}\sigma})=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$；选 A

9、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\text{L}+\frac{1}{n(n+1)}\right]^n=$__________

【答案】e^{-1}.

【解析】$\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$.

10、曲线$y=x\sin x+2\cos x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2})$的拐点坐标为__________

【答案】$(\pi,-2)$.

【解析】令$y''=-x\sin x=0$，可得$x=\pi$，因此拐点坐标为$(\pi,-2)$.

11、已知$f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$，则$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$__________

【答案】$\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.

【解析】依题意，$f'(x)=\sqrt{1+x^4}$且$f(1)=0$.因此，

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\left[x^3 f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2}).$$

12、A、B 两商品的价格分别为P_A、P_B，需求函数$Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$，$P_A=10$，$P_B=20$,求 A 商品对自身价格的需求弹性$h_{AA}=$__________ $(h>0)$.

【答案】0.4.

【解析】因为$\eta_{AA}=-\frac{P_A}{Q_A}\cdot\frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}P_A}=-\frac{P_A}{Q_A}\cdot(-2P_A-P_B)$，将$P_A=10$，$P_B=20$，$Q_A=1000$代入，可得$\eta_{AA}=\frac{10}{1000}\cdot 400=0.4$.

13、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，求$a=$__________

【答案】1.

【解析】因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 由无穷多解，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 作初等行变换，因为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{pmatrix},$$

故 $a^2-1=a-1=0$，因此 $a=1$.

14、X 为连续型随机变量，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2},0<x<2\\0,else\end{cases}$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的期望，

求 $P\{F(X)>EX-1\}=$__________

【答案】$\frac{2}{3}$.

【解答】由条件可得 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$，且可求得分布函数

$F(x)=\begin{cases}0,x<0,\\\frac{x^2}{4},0„ x<2,\\1,\ x..2.\end{cases}$ 故可得 $P\{F(X)>EX-1\}=P\{F(X)>\frac{1}{3}\}=\frac{2}{3}$.

15、已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\xe^x+1, & x„ 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

【答案】$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(lnx+1)\text{；}x>0\\e^x(x+1)\text{；}x<0\end{cases}$，

极大值 $f(0)=1$.极小值 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$，$f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

【解析】解：当 $x>0$ 时：

$$f'(x)=(e^{2xlnx}-1)'=(e^{2xlnx})'=e^{2xlnx}(2lnx+2)=2x^{2x}(lnx+1)$$

当 $x<0$：

$$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$$

因此$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(lnx+1)\text{；}x>0\\ e^x(x+1)\text{；}x<0\end{cases}$

当x = 0：

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{2xlnx}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{2xlnx}{x}=-\infty$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to0+}e^x=0$$

当x > 0时，$f'(0)<0$，$f(x)$单调递减，当x < 0时，$f'(0)>0$，$f(x)$单调递增

因此$f(x)$在x = 0处取得极大值，且$f(0)=1$.

令 $f'(x)=0$得，$x=-1$及$x=\frac{1}{e}$. 又 $f''(-1)>0, f''(\frac{1}{e})>0$，故极小值为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$， $f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

16、已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【答案】$1-3f''_{11}-f''_{22}$.

【解析】依题意知，

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y)\text{，}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y).$$

因为 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，故 $f''_{12}=f''_{21}$，因此，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-(f''_{11}+f''_{12})-(f''_{21}+f''_{22})=-f''_{11}-2f''_{12}-f''_{22}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-(f''_{11}-f''_{12})-(f''_{21}-f''_{22})=1-f''_{11}+f''_{22}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-(f''_{11}-f''_{12})+(f''_{21}-f''_{22})=-f''_{11}+2f''_{12}-f''_{22}.$$

所以，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f''_{11}-f''_{22}$.

17、已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，且满足 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$.

（1）求 $y(x)$；

（2）若 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\right\}$，求区域 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

【答案】（1）$y(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.　（2）

【解析】（1）$y(x)=\mathrm{e}^{-\int -x\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x}\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(C+\sqrt{x}).$

因为 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$，故 $C=0$，所以 $y(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

（2）由旋转体体积公式，

$$V=\pi\int_1^2(\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}})^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}).$$

18、求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x\,(x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解:设在区间 $[n\pi,(n+1)\pi]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上所围的面积记为 u_n,则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x;$$

记 $I=\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$,则 $I=-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\cos x=-(\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-(\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-I,$$

所以 $I=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)+C$；

因此 $u_n=(-1)^n(-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi})$；

(这里需要注意 $\cos n\pi=(-1)^n$)

因此所求面积为 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$.

19、设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\,(n=0,1,2\cdots)$

（1）证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减；且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\,(n=2,3\cdots)$

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

(1)证明: $a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$,所以 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$a_n=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}[x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx^{n-1}]$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}(\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n),$$

从而有 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\,(n=2,3\cdots)$；

(2)因为 $\dfrac{a_n}{a_{n-2}}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\dfrac{a_n}{a_n}=1$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$,由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1.$$

20、已知向量组 I ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a^2+3)^T$

II ：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a+3)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,1-a)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,3,a^2+3)^T$

若向量组 I 与 II 等价，求 a 的取值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

【答案】$a\neq-1$；

$a=1$时，$\boldsymbol{\beta}_3=(3-k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$ 为任意常数）；

当 $a\neq\pm1$时，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

【解析】令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，所以，$|\boldsymbol{A}|=1-a^2$，$|\boldsymbol{B}|=2(a^2-1)$.

因向量组 I 与 II 等价，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作初等行变换.因为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}.$$

当$a=1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$；当$a=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，但$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$；当$a\neq\pm1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$. 综上，只需$a\neq-1$即可.

因为对列向量组构成的矩阵作初等行变换，不改变线性关系.

①当$a=1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故$\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$的等价方程组为$\begin{cases}x_1=3-2x_3,\\x_2=-2+x_3.\end{cases}$

故$\boldsymbol{\beta}_3=(3-k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$为任意常数）；

②当$a\neq\pm1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

21 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似.

（1） 求x,y；

（2） 求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$.

解:(1)相似矩阵有相同的特征值,因此有$\begin{cases}-2+x-2=2-1+y,\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$

又$|\boldsymbol{A}|=-2(4-2x),|\boldsymbol{B}|=-2y$,所以$x=3,y=-2$.

(2)易知B的特征值为$2,-1,-2$;因此

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\text{取}\ \xi_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\text{取}\ \xi_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}4&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,取 $\xi_3=(-1,2,4)^{\mathrm{T}}$

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,则有 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$;

同理可得,对于矩阵 $\boldsymbol{B}$,有矩阵 $P_2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$,所以

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$,即 $B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$,所以

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

22、设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p$，$P(Y=1)=1-p$, $(0<p<1)$，令 $Z=XY$.

（1） 求 Z 的概率密度;

（2） p 为何值时，X 与 Z 不相关;

（3） X 与 Z 是否相互独立?

【答案】（1） $f_Z(z)=\begin{cases}pe^{z}, & z<0,\\(1-p)e^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$（2） $p=\dfrac{1}{2}$;（3）不独立.

【解析】（1） Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P(XY\leqslant z)=P(Y=-1,X\geqslant -z)+P(Y=1,X\leqslant z)$，因为 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

因此，$F_Z(z)=p[1-F_X(-z)]+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}pe^{z}, & z<0,\\(1-p)(1-e^{-z}), & z\geqslant 0.\end{cases}$

所以，Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} pe^z, & z<0, \\ (1-p)e^{-z}, & z\geq 0. \end{cases}$

（2）当 $Cov(X,Z)=EXZ-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=0$ 时，X 与 Z 不相关．因为 $DX=1$，$EY=1-2p$，故 $p=\frac{1}{2}$.

（3）不独立．因为

$P(0\leq X\leq 1, Z\leq 1)=P(0\leq X\leq 1, XY\leq 1)=P(0\leq X\leq 1)$，

而 $P(Z\leq 1)=F_Z(1)=(1-p)(1-e^{-1})\neq 1$，故 $P(0\leq X\leq 1, Z\leq 1)\neq P(0\leq X\leq 1)\cdot P(Z\leq 1)$，

所以 X 与 Z 不独立.

23、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases} \frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu, \\ 0, & x<\mu, \end{cases}$$

μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

【解答】（1）由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{A}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,$$

得 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（2）设似然函数 $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

取对数 $\ln L(\sigma^2)=\sum_{n=1}^{n}[\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}]$；

求导数 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}[-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}]=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$ ，

令导数为零解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ ，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.