

## 太原市 2018-2019 学年第一学期高二期末考试

## 数学试卷 (理科)

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

1. 椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的焦距为

A 4      B 5      C 6      D 9

【答案】 C

【考点】 椭圆的基本性质。

【解析】 焦距为  $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 6$ 。2. 命题: “ $\forall x \in R, 3^x > 0$ ” 的否定是A  $\exists x_0 \in R, 3^{x_0} \leq 0$       B  $\exists x_0 \in R, 3^{x_0} < 0$       C  $\forall x \in R, 3^x \leq 0$       D  $\forall x \in R, 3^x < 0$ 

【答案】 A

【考点】 全称命题和特称命题的否定。

【解析】 全称命题的否定是将全称量词改为存在量词, 然后结论否定。

3. 在空间直角坐标系中, 已知  $A(1,0,1), B(3,2,1)$ , 则线段  $AB$  的中点坐标是

A (1,1,1)      B (2,1,1)      C (1,1,2)      D (1,2,3)

【答案】 B

【考点】 空间直角坐标系中, 中点坐标的考查。

【解析】 空间直角坐标系和平面直角坐标系中的坐标表示类似。

4. 下列命题是真命题的是



- A  $4 \in \{2,3\}$  且  $2 \in \{2,3\}$       B 1 是奇数且 1 是素数  
C 2 是偶数或 3 不是素数      D 周长或面积相等的两个三角形全等

【答案】 C

【考点】 真假命题的考查。

【解析】 A 假命题，B 素数是从 2 开始计算的，D 假命题。

5. 抛物线  $x^2 = \frac{1}{2}y$  的焦点到准线的距离是

- A 1      B 2      C  $\frac{1}{2}$       D  $\frac{1}{4}$

【答案】 D

【考点】 抛物线基本性质的考查。

【解析】 抛物线  $x^2 = \frac{1}{2}y$  的焦点到准线的距离是  $p$ ，此抛物线的  $p = \frac{1}{4}$

6. 已知空间直角坐标系中点  $P(2,1,3)$ ，若在  $z$  轴上取一点  $Q$ ，使得  $|PQ|$  最小，则点  $Q$  的坐标为 ( )

- A. (0,0,1)      B. (0,0,2)      C. (0,0,3)      D. (0,1,0)

【答案】 C

【考点】 空间向量

【解析】 因为点  $Q$  在  $z$  轴上，所以横纵坐标均为 0，若使得  $|PQ|$  最小，则  $z$  坐标须与  $P$  点  $z$  坐标相同。所以选 C

7. “ $mn < 0$ ” 是 “方程  $mx^2 - ny^2 = 1$  表示椭圆” 的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【考点】 椭圆的标准方程

【解析】 因为方程  $mx^2 - ny^2 = 1$  表示椭圆，所以  $m > 0$ ，且  $n < 0 \Rightarrow mn < 0$ ，反之不一定成立，所以选 B

8. 若直线  $l$  的方向向量为  $\vec{m}$ ，平面  $\alpha$  的法向量为  $\vec{n}$ ，则可能使  $l \parallel \alpha$  的是 ( )



- A.  $\vec{m}=(1,0,0), \vec{n}=(-2,0,0)$     B.  $\vec{m}=(1,3,5), \vec{n}=(1,0,1)$   
 C.  $\vec{m}=(0,2,1), \vec{n}=(-1,0,-1)$     D.  $\vec{m}=(1,-1,3), \vec{n}=(0,3,1)$

【答案】 D

【考点】 线线，线面关系

【解析】 若使  $l // \alpha$ ，则需要  $m \perp n$  即  $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，所以选 D

9. 已知  $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$  三点，则以  $\vec{n}=(1,1,1)$  为方向向量的直线与平面  $ABC$  的关系是 ( )

- A. 垂直    B. 不垂直    C. 平行    D. 以上都有可能

【答案】 A

【考点】 线面关系

【解析】 由题知  $\vec{AB}=(-1,1,0), \vec{AC}=(-1,0,1), \vec{n}=(1,1,1), \vec{AB} \cdot \vec{n}=0, \vec{AC} \cdot \vec{n}=0$ ，所以选 A

10. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的右顶点为  $A$ ，抛物线  $C: y^2 = 8ax$  的焦点为  $F$ 。若在  $E$  的渐近线上存在点  $P$ ，使得  $\overline{AP} \perp \overline{FP}$ ，则曲线  $E$  的离心率的取值范围是 ( )

- A.  $(1, 2)$     B.  $(1, \frac{3\sqrt{2}}{4}]$     C.  $[\frac{3\sqrt{2}}{4}, +\infty)$     D.  $(2, +\infty)$

【答案】 B

【考点】 离心率的取值范围

【解析】 设点  $P(x, \pm \frac{b}{a}x), A(a, 0), F(2a, 0)$ ，则  $\overline{AP}=(x-a, y), \overline{FP}=(x-2a, y)$ ，由  $\overline{AP} \perp \overline{FP}$

得  $\frac{c^2}{a^2}x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ ，因为存在点  $P$ ，所以由  $\Delta \geq 0 \Rightarrow 1 < e \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ，所以选 B

11. 若  $\triangle ABC$  的三个顶点分别为  $A(0, 0, \sqrt{5}), B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{5}), C(-1, 0, \sqrt{5})$ ，则角  $A$  的大小为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$     B.  $\frac{\pi}{4}$     C.  $\frac{\pi}{3}$     D.  $\frac{\pi}{2}$

【答案】 A



**【考点】**空间向量求角问题

**【解析】**  $\overline{AB} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), |\overline{AB}| = 1, \overline{AC} = (-1, 0, 0), |\overline{AC}| = 1, \cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 由  $A \in (0, \pi) \Rightarrow A = \frac{\pi}{6}$

12. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为1, 点  $P$  是平面  $ABCD$  的动点, 若点  $P$  到直线  $A_1D_1$  的距离等于点  $P$  到直线  $CD$  的距离, 则动点  $P$  的轨迹所在的曲线是 ( )

A. 抛物线      B. 双曲线      C. 椭圆      D. 直线

**【答案】** B

**【考点】**立体几何中的轨迹问题

**【解析】** 以  $A$  为原点,  $AB$  为  $x$  轴,  $AD$  为  $y$  轴, 建立平面直角坐标系, 设  $P(x, y)$ , 作  $PE \perp AD$  于  $E, PF \perp A_1D_1$  于  $F$ , 连接  $EF$ , 易知  $|PF|^2 = |PE|^2 + |EF|^2 = x^2 + 1$ , 又作  $PN \perp CD$  于  $N$ , 则  $|PN| = |y - 1|$ , 化简得  $x^2 - (y - 1)^2 = 1$ , 故点  $P$  的轨迹为双曲线.

二、填空题 (本大题共4小题, 每小题3分, 共12分)

13. 双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$  的实轴长为\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $2\sqrt{3}$

**【考点】**考察双曲线的标准方程及简单性质

**【解析】** 由双曲线方程可知焦点在  $x$  轴上, 故  $a^2 = 3$ , 实轴长为  $2a = 2\sqrt{3}$ 。

14. 命题“如果  $x + y > 3$ , 那么  $x > 1$  且  $y > 2$ ”的逆否命题是\_\_\_\_\_。

**【答案】** 如果  $x \leq 1$  或  $y \leq 2$ , 则  $x + y \leq 3$

**【考点】**考察逆否命题的定义

**【解析】** 根据定义写出结果即可, 要注意且命题的否定是非命题。

15. 已知双曲线  $C$  与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  有共同的焦点, 且它们的离心率之和为  $\frac{14}{5}$ , 则双曲线  $C$  的方程是\_\_\_\_\_。



【答案】  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

【考点】 考察椭圆及双曲线的标准方程和离心率

【解析】 先看椭圆方程，可知其焦点在  $y$  轴， $c=4, a_1=5$ ，离心率为  $e_1 = \frac{4}{5}$ 。由此可得双曲线焦点在  $y$  轴， $c=4$ ，离心率为  $e_2 = 2, a_2 = 2, b_2 = 2\sqrt{3}$ 。由此可写出双曲线方程为  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ 。

16. 空间四点  $A, B, C, D$  满足  $|\overline{AB}| = 3, |\overline{BC}| = 7, |\overline{CD}| = 11, |\overline{DA}| = 9$  则  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} =$  \_\_\_\_\_。

【答案】 0

【考点】 考察平面向量数量积的运算。

【解析】  $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 130$ 。因为  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0$ ，故  $\overline{AB} + \overline{CD} = -(\overline{BC} + \overline{DA})$ ，故  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{DA}$ ，而  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 52 分，写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题满分 10 分) 已知命题  $p$ : 曲线  $y = x^2 + (2m-3)x - 1$  与  $x$  轴相交于不同的两点；命题  $q$ : 椭圆  $\frac{x^2}{m^2+1} + \frac{y^2}{2} = 1$  的焦点在  $y$  轴上。

(1) 判断命题  $p$  的否定的真假；

(2) 若 “ $p$  且  $q$ ” 是假命题，“ $p$  或  $q$ ” 是真命题，求实数  $m$  的取值范围。

【答案】 (1) 假命题；(2)  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

【考点】 复合命题的真假判断，二次函数，椭圆的基本概念

【解析】 (1)  $\Delta = (2m-3)^2 + 4 > 0$ ，故命题  $p$  为真， $\neg p$  为假；

(2) 由已知得， $p$  真  $q$  假。 $q$  为真时， $m^2 + 1 < 2 \Rightarrow -1 < m < 1$ ，所以  $q$  为假时， $m \leq -1$  或  $m \geq 1$

所以  $m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ 。



18. (本小题满分10分) 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  经过点  $P(4,4)$

(1) 求抛物线方程;

(2) 若  $A, B$  为抛物线  $C$  上的不同两点, 且  $AB$  的中点坐标为  $(2,1)$ , 求直线  $AB$  的方程.

**【答案】** (1)  $y^2 = 4x$ ; (2) 直线  $AB$  的方程为  $y = 2x - 3$

**【考点】** 抛物线标准方程, 点差法, 点斜式求直线方程

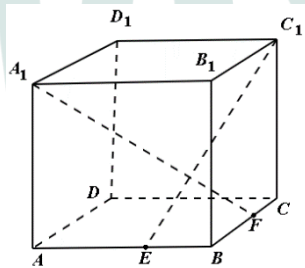
**【解析】** (1) 由题知抛物线  $C: y^2 = 2px$  经过点  $P(4,4)$  将点  $P(4,4)$  带入  $y^2 = 2px$ , 解得  $p = 2$ , 故抛物线方程为  $y^2 = 4x$ .

(2) 设点  $A, B$  坐标分别为  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 由  $A, B$  为抛物线  $C$  上的不同两点,

故有  $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 & (1) \\ y_2^2 = 4x_2 & (2) \end{cases}$ , 由 (1)-(2) 得  $y_1^2 - y_2^2 = 4x_1 - 4x_2$ , 整理得  $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2}$ , 又  $AB$  的中点坐标为  $(2,1)$ , 则  $y_1 + y_2 = 2$ ,

代入得  $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2$ , 直线  $AB$  过点  $(2,1)$ , 直线  $AB$  的方程为  $y - 1 = 2(x - 2)$ , 即  $y = 2x - 3$

19. (本小题满分10分) 如图, 在棱长为  $a$  的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别是棱  $AB, BC$  上的点, 且  $\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{FC} = 3$ .



(1) 求线段  $A_1F$  的长

(2) 求异面直线  $A_1F$  与  $C_1E$  所成的角

**【答案】** (1)  $\frac{\sqrt{22}a}{3}$ ; (2)  $\frac{\pi}{2}$

**【考点】** 空间立体几何, 异面直线所成的角

**【解析】** 以  $D$  为坐标原点  $DA, DC, DD_1$  分别为  $x, y, z$  轴建立直角坐标系, 根据题意及  $\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{FC} = 3$  可得:

$$A_1(a, 0, a), F(\frac{a}{3}, a, 0), C_1(0, a, a), E(a, \frac{2a}{3}, 0), \overrightarrow{A_1F} = (-\frac{2a}{3}, a, -a), \overrightarrow{C_1E} = (a, -\frac{a}{3}, -a)$$

$$(1) |A_1F| = \sqrt{(-\frac{2a}{3})^2 + a^2 + (-a)^2} = \sqrt{\frac{22}{9}a^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}a$$



$$(2) \cos \langle \overrightarrow{A_1F}, \overrightarrow{C_1E} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1F} \cdot \overrightarrow{C_1E}}{|\overrightarrow{A_1F}| \cdot |\overrightarrow{C_1E}|} = \frac{-\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2 + a^2}{\sqrt{(-\frac{2a}{3})^2 + a^2 + (-a)^2} \cdot \sqrt{a^2 + (-\frac{a}{3})^2 + (-a)^2}} = 0 \text{ 故异面直线 } A_1F \text{ 与 } C_1E \text{ 所成的角为 } \frac{\pi}{2}$$

20. (本小题满分 10 分) 说明: 请考生在 (A)、(B) 两小题中任选一题作答

(A) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 焦距为 2, 过  $(1, 0)$  点作直线与椭圆相交于  $A, B$  两点, 连接  $AF_1, BF_1$ , 且  $\triangle ABF_1$  的周长为  $4\sqrt{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若直线  $AB$  的斜率为 1, 且  $\frac{|BF_2|}{|AF_2|} = \lambda$ , 求  $\lambda$  的值.

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ; (2)  $\lambda = \frac{1}{3}$  或 3

**【考点】** 椭圆的定义与标准方程, 直线与椭圆的位置关系

**【解析】** (1) 由题意得  $2c = 2, 4a = 4\sqrt{2}$ , 又因为  $a^2 = b^2 + c^2$ , 故可得  $a^2 = 2, b^2 = 1$ , 从而椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) 由题意可得直线  $AB$  的方程为  $y = x - 1$ , 联立  $\begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$  可得  $3x^2 - 4x = 0$ , 从而  $A(0, -1), B(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$  或者  $A(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}), B(0, -1)$ ,

由题意  $F_2(1, 0)$ , 当  $A, B$  坐标分别为  $A(0, -1), B(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$  时,  $|AF_2| = \sqrt{2}, |BF_2| = \frac{\sqrt{2}}{3}$  故  $\lambda = \frac{1}{3}$ ; 当  $A, B$  坐标分别为  $A(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}), B(0, -1)$  时,

$|AF_2| = \frac{\sqrt{2}}{3}, |BF_2| = \sqrt{2}$  故  $\lambda = 3$ . 综上  $\lambda = \frac{1}{3}$  或 3

(B) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 焦距为 2, 过  $(1, 0)$  点作直线与椭圆交于  $A, B$  两点, 连接

$AF_1, BF_1$ , 且  $\triangle ABF_1$  的周长为  $4\sqrt{2}$

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程

(2) 若  $|AB| = 4|F_2A|$ , 求直线  $AB$  的方程

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ; (2)  $y = x - 1$  或  $y = -x + 1$

**【考点】** 椭圆的定义与标准方程, 直线与椭圆的位置关系



【解析】(1) 焦距为 2, 则  $2c=2, c=1$ , 所以右焦点为  $F_2(1,0)$ , 因为  $AB$  经过右焦点, 所以  $\triangle ABF_1$  的周长为  $4a=4\sqrt{2}$ , 所以  $a=\sqrt{2}, b^2=a^2-c^2=1$ , 所以椭圆方程为  $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) 方法一: 当直线  $AB$  斜率不存在时, 此时  $|AF_2|=|BF_2|$  不符合题意, 故直线  $AB$  斜率存在, 设为  $k$ , 直线  $AB$  方程

为  $y=k(x-1)$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 因为  $|AB|=4|F_2A|$ , 所以  $\overrightarrow{AF_2}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ , 所以  $1-x_1=\frac{1}{4}(x_2-x_1)$ , 即  $x_2=4-3x_1$ , 联立  $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$

得  $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$ , 所以  $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}, x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$ , 结合  $x_2=4-3x_1$ , 可解得  $k^2=1$ , 所以  $k=\pm 1$ , 所以直线

$AB$  的方程为  $y=x-1$  或  $y=-x+1$

方法二: 利用焦点弦中的二级结论 (不可用在大题中)

因为  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{|BF_2|}{|AF_2|}=\lambda=3$ , 带入  $e\cos\theta=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ , 解得  $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $\theta=45^\circ$  或  $\theta=135^\circ$ , 所以  $k=\pm 1$ , 直线  $AB$  的方程

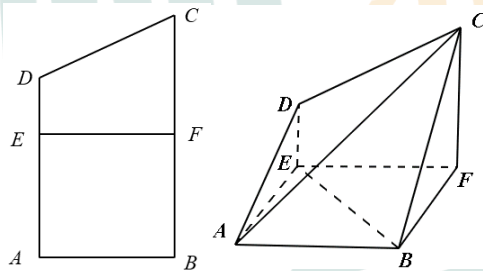
为  $y=x-1$  或  $y=-x+1$

21. (本小题满分 12 分) 说明: 请考生在 (A)、(B) 两小题中任选一题作答

(A) 已知四边形  $ABCD$  为直角梯形,  $AD \parallel BC, AB \perp BC, BC=2AB=4, AD=3$ , 过  $BC$  的中点  $F$  作  $EF \parallel AB$ , 交  $AD$  于点  $E$ , 沿  $EF$  将四边形  $EFCD$  折起, 连接  $AD, AC, BC$

(1) 求证:  $BE \parallel$  平面  $ACD$ ;

(2) 若平面  $CDEF \perp$  平面  $ABFE$ , 求二面角  $B-AC-D$  的大小.





**【考点】**面面平行的证明，线面平行的证明，空间向量法求二面角。

**【答案】**(1) 略；(2)  $\frac{5}{6}\pi$

**【解析】**(1) 在未折叠之前有：F 是 BC 的中点，则  $BF = CF = AB = 2$ 。又  $EF \parallel AB, AE \parallel FB$  且  $\angle B = 90^\circ, AB = BF$ ，则四边形 ABFE 是正方形， $AE = FB = 2, DE =$

$AD - AE = 1$ 。在折点之后，取 CF 中点 G，连接 EG, BG，则  $CG = \frac{1}{2}CF = 1$ ，又  $DE = 1 = CG$  且  $DE \parallel CF$  即  $DE \parallel CG$ ，则四

边形 DEGC 是平行四边形， $\therefore EG \parallel DC, \therefore FG = \frac{1}{2}CF = 1 = DE$  且  $DE \parallel CF$  即  $DE \parallel GF$ ， $\therefore$  四边形

DEFG 是平行四边形， $DG \parallel EF, DG = EF$ ，

$\because AB \parallel EF, AB = EF, \therefore AB \parallel DG, AB = DG$ ，四边形 ADGB 为平行四边形， $AD \parallel BG$

$\because EG \parallel DC, BG \parallel AD, EG \cap BG = G, AD \cap DC = D, \therefore$  平面 ACD  $\parallel$  平面 BGE

$\because BE \subseteq$  平面 BGE  $\therefore BE \parallel$  平面 ACD

(2) 以 E 点为原点，EA, EF, ED 为坐标轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则  $A(2, 0, 0)$ ，

$B(2, 2, 0), D(0, 0, 1), C(0, 2, 2), \vec{AC} = (-2, 2, 2), \vec{AD} = (-2, 0, 1), \vec{AB} = (0, 2, 0)$ ，设平面 ACD 的法向量为

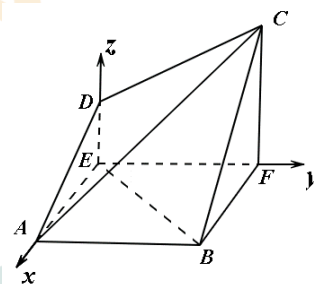
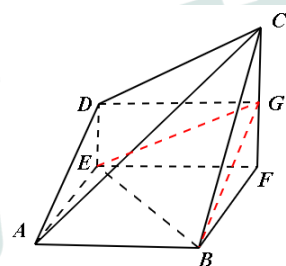
$\vec{m} = (a, b, c)$ ，平面 ABC 的法向量为  $\vec{n} = (d, e, f)$ ，由

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b + 2c = 0 \\ -2a + c = 0 \end{cases}, \text{ 令 } a = 1 \text{ 得 } \vec{m} = (1, -1, 2)$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2d + 2e + 2f = 0 \\ 2e = 0 \end{cases}, \text{ 令 } d = 1 \text{ 得 } \vec{n} = (1, 0, 1)$$

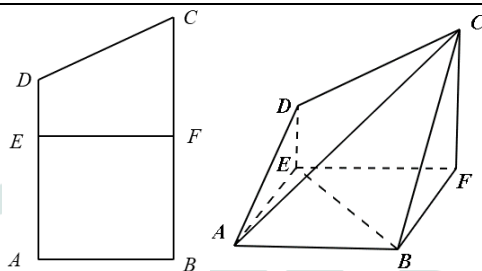
$$\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因为二面角}$$

$B-AC-D$  是钝二面角，所以其大小为  $\frac{5}{6}\pi$ 。



(B) 已知四边形 ABCD 是直角梯形， $AD \parallel BC, AB \perp BC, BC = 2AB = 4, AD = 3$ ，过 BC 的中点 F 作  $EF \parallel AB$ ，交 AD 于 E，沿 EF 将四边形 EFCD 折起，连接 AD, BC, AC；





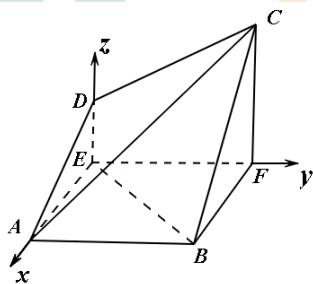
(1) 求证： $BE \parallel$ 平面  $ACD$ ；

(2) 若平面  $CDEF \perp$  平面  $ABFE$ ，在线段  $BC$  上是否存在点  $P$ ，使得直线  $FP$  与平面  $ACD$  所成的角为  $30^\circ$ ，并说明理由；

**【考点】** 线面平行的证明，空间向量法求线面角。

**【答案】** (1) 略；(2) 存在，且  $\frac{CP}{CB} = \frac{-1+\sqrt{21}}{4}$  (或  $\frac{BP}{BC} = \frac{5-\sqrt{21}}{4}$ )

**【解析】** (1) 证明：连结  $AF$  交  $BE$  与  $O$ ，则  $O$  为  $AF$  中点，设  $G$  为  $AC$  中点，连结  $OG, DG$ ，则  $OG \parallel CF$ ，且  $OG = \frac{1}{2}CF$ ，由已知  $DE \parallel OG$  且  $DE = OG$ ，所以四边形  $DEOG$  为平行四边形，则  $EO \parallel DG$ ，即  $BE \parallel DG$ ，且  $BE \not\subset$  平面  $ACD, DG \subset$  平面  $ACD$ ，所以  $BE \parallel$  平面  $ACD$ 。



(2) 由已知  $ABFE$  为边长为 2 的正方形， $\therefore AD \perp EF$ ，因为平面  $ABFE \perp$  平面  $EFCD$ ，又  $DE \perp EF$ ， $\therefore EA, EF, ED$  两两垂直，以  $E$  为原点， $EA, EF, ED$  分别为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系，则  $E(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), F(0,2,0), D(0,0,1), C(0,2,2)$ ，可求得平面  $ACD$  法向量为  $\vec{n} = (1, -1, 2)$ ，假设线段  $BC$  上存在一点  $P$ ，设  $\vec{CP} = \lambda \vec{CB} (0 \leq \lambda \leq 1), P = (x, y, z)$ ，则

$\vec{CP} = \lambda \vec{CB} = (2\lambda, 0, -2\lambda)$ ，即  $P(2\lambda, 2, 2-2\lambda), \vec{FP} = (2\lambda, 0, 2-2\lambda)$ ，由直线  $FP$  与平面  $ACD$  所成角  $30^\circ$  则  $\frac{1}{2} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{FP}|}{|\vec{n}| |\vec{FP}|}$  得  $\lambda = \frac{-1+\sqrt{21}}{4}$

