太原市 **2018-2019** 学年第一学期高三年级期末考试

数学试卷（理科）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.已知集合 $A=\{x\in N|0\le x\le 3\},B=\{x\in R|-2<x<2\}$，则 $A\cap B=$

$A.\{0,1\}$　　$B.\{1\}$　　$C.[0,1]$　　$D.[0,2)$

【答案】A

【考点】交集的运算

【解析】$A=\{0,1,2,3\},A\cap B=\{0,1\}$，故选 $D.$

2.设复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=1-i$，则 $z=$

$A.1$　　$B.i$　　$C.-1$　　$D.-i$

【答案】D

【考点】复数的运算

【解析】$z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{-2i}{2}=-i$，故选 D

3.已知 $\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，则 $\tan 2\alpha=$

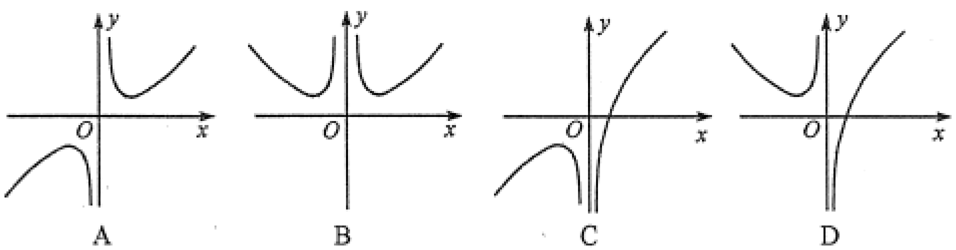
$A.\dfrac{4}{3}$　　$B.-\dfrac{4}{3}$　　$C.\dfrac{4}{5}$　　$D.-\dfrac{4}{5}$

【答案】B

【考点】三角函数的二倍角公式

【解析】根据 $\sin\alpha-2\cos\alpha=0$ 得 $\tan\alpha=2$，故 $\tan 2\alpha=-\dfrac{4}{3}$ 故选 B

4.函数 $f(x)=|x|-\dfrac{1}{x}$ 的大致图像为



【答案】D

【考点】函数图像

【解析】根据 $f(x)=|x|-\frac{1}{x}$ 该函数为非奇非偶函数，并且 $f(-1)>0$，故选 D.

5.设 α,β 为两个不同平面，m,n 为两条不同的直线，给出以下命题：()

（1）若 $m\perp\alpha,n//\alpha$，则 $m\perp n$；（2）若 $\alpha//\beta,m\subset\alpha$，则 $m//\beta$；

（3）若 $\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则 $m\perp n$；（4）若 $m\perp n,m\perp\alpha,n//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；则下列真命题个数为

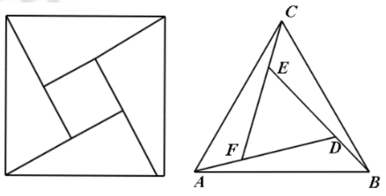
$A.1$　　$B.2$　　$C.3$　　$D.4$

【答案】B

【考点】空间中平行垂直的判定与性质

【解析】（1）正确，$n//\alpha$ 则 n 平行于 α 中的某条线 l，而 $m\perp\alpha$ 则 $m\perp l$，从而 $m\perp n$；（2）$\alpha//\beta$，则 α,β 无交点，若 $m\subset\alpha$，则 m,β 也无交点，即 $m//\beta$；（3）错误，如正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $ABCD,ADD_1A_1$ 分别为平面 α,β，而 BC,AD 分别为直线 m,n，显然 m,n 互相平行；（4）错误，如正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AA_1,AD 分别为直线 m,n，平面 $ABCD,A_1D_1BC$ 分别为平面 α,β，显然 α,β 不垂直。

6.赵爽是我国古代数学家、天文学家大约在公元 222 年赵爽为《周碑算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”(以弦为边长得到的正方形是由 4 个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成的)类比“赵爽弦图”，赵爽弦图可类似地构造如图所示的图形，它是由个 3 全等的等边三角形与中间的一个小等边三角形组成的一个大等边三角形，设 $DF=2AF$，若在大等边三角形中随机取一点，则此点取自小等边三角形的概率是（）



$A.\frac{2\sqrt{13}}{13}$　　$B.\frac{4}{13}$　　$C.\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　$D.\frac{4}{7}$

【答案】B

【考点】几何概型，解三角形余弦定理

【解析】解由题可得，小三角形的占大三角形的面积比为概率。设 $AF=1$，则 $CF=AD=3$，在 ΔAFC 由余弦定理可得，

$AC^2=9+1-2\times3\times\cos120°=13$，则 $P=\dfrac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times4}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times13}=\dfrac{4}{13}$

7.将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x$ 图象的向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的一个对称中心是（）

$A.(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})$ $B.(-\frac{\pi}{4},-\frac{1}{2})$ $C.(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2})$ $D.(-\frac{5\pi}{12},-\frac{1}{2})$

【答案】A

【考点】三角函数的化简和平移

【解析】解由题得 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=\dfrac{\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+1}{2}=\dfrac{2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，

所以 $g(x)=\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]+\frac{1}{2}=\cos2x+\frac{1}{2}$，所以其对称中心为 A

8．设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 都是单位向量，且 $2\vec{a}=\vec{b}-\sqrt{3}\vec{c}$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为（）

$A.\frac{\pi}{6}$ $B.\frac{\pi}{4}$ $C.\frac{\pi}{3}$ $D.\frac{2\pi}{3}$

【答案】C

【考点】平面向量的数量积

【解析】$2\vec{a}=\vec{b}-\sqrt{3}\vec{c}$，两边同时平方可得 $4\vec{a}^2=\vec{b}^2+3\vec{c}^2-2\sqrt{3}\vec{c}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{c}\cdot\vec{b}=0$，且 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2-\sqrt{3}\vec{c}\cdot\vec{b}=1$，即 $2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta=1\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2},\theta=\frac{\pi}{3}$

9.已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\geq5\\0\leq x\leq3\\0\leq y\leq4\end{cases}$，若不等式 $ax-y>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为

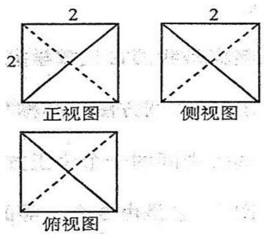
$A.(-\infty,\frac{2}{3})$ $B.(4,+\infty)$ $C.(\frac{4}{3},4)$ $D.(\frac{2}{3},4)$

【答案】B

【考点】线性规划问题。

【解析】不等式组 $\begin{cases}x+y\geq5\\0\leq x\leq3\\0\leq y\leq4\end{cases}$，表示的是平面直角坐标系中以点 $(1,4),(3,4),(3,2)$ 为顶点的三角形及其内部，根据线性规划问题的意义，只要目标函数 $z=ax-y$ 在上述三点处的取值均大于 0 即可，所以实数 a 满足 $\begin{cases}a-4>0\\3a-4>0\\3a-2>0\end{cases}$，解得 $a>4$。

10.如图是一个几何体的三视图，则该几何体的体积是



$A.8$ $B.4$ $C.\frac{8}{3}$ $D.\frac{16}{3}$

【答案】C

【考点】三视图还原，求体积。

【解析】此几何体为正方体沿面对角线截去四个角得到的正四面体，所以其体积为$V=2^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{8}{3}$

11.已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_n\neq1(n\in N^*),a_1+a_{2019}=1$，若$f(x)=\frac{2x}{x-1}$，则$f(a_1)\times f(a_2)\times\cdots\times$

$f(a_{2019})=$（）

$A.-2^{2019}$ $B.2^{2020}$ $C.-2^{2017}$ $D.2^{2018}$

【答案】A

【考点】等差数列的性质。

【解析】$f(a_1)\cdot f(a_{2019})=\frac{2a_1}{a_1-1}\cdot\frac{2a_{2019}}{a_{2019}-1}=\frac{4a_1a_{2019}}{a_1a_{2019}-(a_1+a_{2019})+1}$，又$a_1+a_{2019}=1$，故$f(a_1)\cdot f(a_{2019})=4$，同理$f(a_2)\cdot f(a_{2018})=f(a_3)\cdot f(a_{2017})=\cdots=f(a_{1009})\cdot f(a_{1011})=4$。且$f(a_{1010})=-2$，故原式答案为$-2^{2019}$，选$A$。

12.已知定义在R上的可导函数$f(x)$，对于任意实数x都有$f(-x)=f(x)-2x$成立，且当$x\in(-\infty,0]$时，都有$f'(x)<2x+1$成立，若$f(2m)<f(m-1)+3m(m+1)$，则实数m的取值范围为（）

$A.(-1,\frac{1}{3})$ $B.(-1,0)$ $C.(-\infty,-1)$ $D.(-\frac{1}{3},+\infty)$

【答案】A

【考点】导数的构造、偶函数的性质。

【解析】不妨令$F(x)=f(x)-x^2-x$，则$F(-x)=f(-x)-(-x)^2-(-x)=f(x)-x^2+x$，两式作差并结合题设$f(-x)=f(x)-2x$，可得$F(x)-F(-x)=0$，即函数$F(x)$为偶函数。且当$x\in(-\infty,0]$时，$F'(x)<0$，即$F(x)$单调递减。由$f(2m)<f(m-1)+3m(m+1)\Leftrightarrow f(2m)-(2m)^2-2m<f(m-1)-(m-1)^2-(m-1)$，即$F(2m)<F(m-1)$由偶函数的性质可知：$|2m|<|m-1|$，平方解得：$-1<m<\frac{1}{3}$，选$A$。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在题中横线上。）

13.一串数字代码是 7 个 1 和 3 个 0 组成，则这样的不同数字代码的个数为：（用数字作答）

【答案】120

【考点】排列组合

【解析】一串数字由 10 个数字组成，则取出 7 个位置排 1，剩下的数字排 0，则不同数字的代码有 $C_{10}^{7}=C_{10}^{3}=120$

14.命题“$\exists x\in[1,2],x+\frac{1}{x}>2a$”是真命题，则实数 a 的取值范围为：

【答案】$(-\infty,\frac{5}{4})$

【考点】特称命题

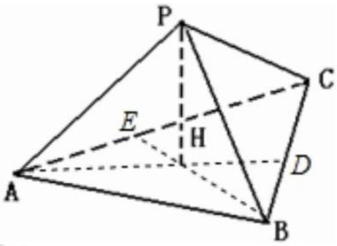
【解析】由题意可得，命题“$\exists x\in[1,2],x+\frac{1}{x}>2a$”是真命题，等价于 $(x+\frac{1}{x})_{\max}>2a$，又因为 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 上单调递增，所以 $(x+\frac{1}{x})_{\max}=\frac{5}{2}$，即 $2a<\frac{5}{2}$，解得，$a<\frac{5}{4}$

15.在三棱锥 $P-ABC$ 中，顶点 P 在底面 ABC 的投影 H 是 ΔABC 的垂心，$PB=PC,BC=2$，侧面 PBC 与底面 ABC 所成二面角的大小为 $45°$，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为：

【答案】$\frac{1}{3}$

【考点】二面角，三棱锥的体积

【解析】



顶点 P 在底面 ABC 的投影为 H 是 ΔABC 的垂心，$\because PH\perp$ 平面 $ABC\Rightarrow PH\perp BC$，又 H 是 ΔABC 的垂心，$AH\perp BC$，延长 AH 交 BC 于点 D，再连接 PD，则 $BC\perp$ 平面 $PAD,\Leftarrow PD\perp BC$，因为 $PB=PC\Rightarrow D$ 为 BC 的中点，$AB=AC$，由底面 ABC 易知 $\Delta BDH\sim\Delta ABD\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DH}\Rightarrow AD\cdot DH=1$，侧面 PBC 与底面 ABC 所成二面角的大小为 $45°$，则 $PH=DH$，则

$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}PH=\frac{1}{3}AD\cdot DH=\frac{1}{3}$

16.已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2-bx+(b+1)$，其中 $a,b\in R$，若对于任意 $x\in[\frac{1}{e},+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围（）

【答案】$\left[2-e-\frac{1}{e},+\infty\right)$

【考点】函数与导数，恒成立问题

【解析】由题可知 $f(1)=0, f'(x)=\frac{-2x^2-bx+a}{x}$，根据单调性可知，要使对于任意 $x\in[\frac{1}{e},+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，需 $x=1$ 为极大值点，$f'(1)=-2-b+a=0, b=a-2$，则 $f'(x)=\frac{-2x^2-bx+a}{x}$

$=\frac{-(x-1)(2x+a)}{x}$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{a}{2}$，易知 $-\frac{a}{2}\ge 1$ 时，不合题意，当 $-\frac{a}{2}<1$ 时，即 $a>-2$，需 $f(\frac{1}{e})\le 0$，解得 $a\ge 2-e-\frac{1}{e}$，

综上，$a\ge 2-e-\frac{1}{e}$

三、解答题（解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 12 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1, a_1+a_2+a_3=14, a_2+1$ 是 a_1,a_3 的等差中项，数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+n$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

【答案】（1）$a_n=2^n$；（2）$T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

【考点】数列求通项及求和的方法

【解析】（1）由题 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=14\\ a_1+a_3=2(a_2+1)\end{cases}$ 得 $a_2=4$，从而 $a_1+a_3=10$；即 $\frac{4}{q}+4q=10$ 解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$（舍），则 $a_n=2^n$

（2）当 $n=1$ 时，$a_1b_1=S_1=2$

当 $n\ge 2$ 时，$a_nb_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$

又 $a_1b_1=2$ 符合上式，$\therefore a_nb_n=2n$ 即 $b_n=\frac{2n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$

$T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$ ①

$\frac{1}{2}T_n=\quad\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ ②

由①-②得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n},\therefore T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

18.（本小题满分 12 分）已知 a,b,c 分别是 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边，$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$

（1）求角 B 的大小；

（2）若 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，求 ΔABC 周长的最小值。

【考点】三角函数正余弦定理以及运用。

【解析】（1）由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 得 $2\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$，化简得 $2\cos A\sin B=2\sin C-\sin A,\because A+B+C=\pi,\therefore \sin C=\sin(A+B)$，即 $2\cos A\sin B=2\sin(A+B)-\sin A$ 化简得 $2\sin A\cos B-\sin A=0,\because A\in(0,\pi),\therefore \sin A\neq 0,\cos B=\frac{1}{2},B\in(0,\pi),\therefore B=\frac{\pi}{3}$。

（2）由 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}\Rightarrow ac=4,a+c\geq 2\sqrt{ac}=4$，当且仅当 $a=c=2$ 时上式取等，又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\sqrt{a^2+c^2-4}$，则 $C_{\Delta ABC}=a+b+c=\sqrt{a^2+c^2-4}+a+c=\sqrt{(a+c)^2-12}+a+c\geq 6$，则 ΔABC 周长的最小值是 6。

19.（本小题 12 分）为响应低碳绿色出行，某市推出“新能源分时租赁汽车”，其中一款新能源分时租赁汽车，每次租车收费的标准由以下两部分组成：①根据行驶里数按1元/公里计费;②当租车时间不超过 40 分钟时，按 0.12 元/分钟计费;当租车时间超过 40 分钟时，超出的部分按 0.20 元/分钟计费;③租车时间不足1分钟，按1分钟计算。已知张先生从家里到公司的距离为15公里，每天租用该款汽车上下班各一次，且每次租车时间 $t\in[20,60]$（单位：分钟）.由于堵车，红绿灯等因素，每次路上租车时间 t 是一个随机变量，现统计了他 50 次路上租车时间，整理后得到下表:

租车时间 t（分钟）	[20，30]	（30，40]	（40，50]	（50，60]
频数	2	18	20	10

将上述租车时间的频率视为概率.

(1)写出张先生一次租车费用 y (元)与租车时间 t (分钟)的函数关系式;

(2)公司规定，员工上下班可以免费乘坐公司接送车，若不乘坐公司接送车的每月(按22天计算)给 800 元车补.从经济

收入的角度分析，张先生上下班应该选择公司接送车，还是租用该款新能源汽车?

(3)若张先生一次租车时间不超过 40 分钟为“路段畅通”，设 ξ 表示 3 次租用新能源分时租赁汽车中“路段畅通”的次数，求 ξ 的分布列和期望;

【考点】频率分布表、平均数、随机变量的分布列及数学期望

【答案】（1） $y=\begin{cases}0.12t+15(20\le t\le 40)\\0.2t+11.8(40<t\le 60)\end{cases}$

（2）应该选择公司接送车

（3）ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$E(\xi)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

【解析】（1）当 $20\le t\le 40$ 时， $y=0.12t+15$

当 $40<t\le 60$ 时， $y=0.12\times 40+0.20(t-40)+15=0.2t+11.8$

得 $y=\begin{cases}0.12t+15(20\le t\le 40)\\0.2t+11.8(40<t\le 60)\end{cases}$

（2）张先生租用一次新能源分时租赁汽车上下班，平均用车时间:

$t=25\times\frac{2}{50}+35\times\frac{18}{50}+45\times\frac{20}{50}+55\times\frac{10}{50}=42.6$ (分钟)，

每次上下班租车的费用约为:

$0.2\times 42.6+11.8=20.32$ (元)

一个月上下班租车费用约为:

$20.32\times 22\times 2=894.08>800$,

估计张先生每月的车补不足上下班租用新能源分时租赁汽车用.所以应选择公司接送车.

（3）由频数分布表可知“路段畅通”的概率为 $\frac{2+18}{50}=\frac{2}{5}$

ξ 的可能取值为 $0,1,2,3$

且 $P(\xi=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$，$P(\xi=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$

$\therefore\xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

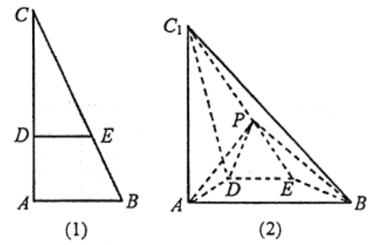
$E(\xi)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

20.（本小题 12 分）

如图（1），在 ΔABC 中，$AB=3$，$DE=2$，$AD=2$，$\angle BAC=90^\circ$，$DE//AB$，将 ΔCDE 沿 DE 折到如图（2）中 ΔC_1DE 的位置，点 P 在 C_1E 上.

（1）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 ADC_1;

（2）若 $\angle ADC_1=60^\circ$，且 AP 与平面 $ABED$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$，求二面角 $P-AD-B$ 的余弦值.



【答案】（1）见解析；（2）$\frac{\sqrt{13}}{13}$

【考点】（1）面面垂直的判定定理；线面垂直的判定定理；（2）空间向量求二面角

【解析】（1）$\because\angle BAC=90^\circ$，$DE//AB$，$\therefore DE\perp C_1D$，$AB\perp AD$，$AB\perp C_1D$

又 $AD\cap C_1D=D$，$\therefore AB\perp$ 平面 ADC_1，又 $AB\subseteq$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 ADC_1

（2）由 $DE//AB$，$AB=3$，$DE=2$，$AD=2$，可知 $CD=C_1D=4$

在 ΔADC_1 中，$AD=2$，$C_1D=4$，$\angle ADC_1=60^\circ$，可知 $AC_1=2\sqrt{3}$，则 $AD\perp AC_1$

由（1）可知，AB，AD，AC_1 两两垂直，则以 A 为原点，DA 为 x 轴，AB 为 y 轴，AC_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$D(-2,0,0)$，$C_1\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$E(-2,2,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC_1}=\left(-2\lambda,2\lambda,2\sqrt{3}(1-\lambda)\right)$ $(0<\lambda<1)$，因为 $AC_1\perp$ 平面 $ABED$，所以平面 $ABED$ 的法向量 $\vec{n_1}=\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，

则 $\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，则 $\overrightarrow{AP}=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$，设平面 ADP 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，解得 $\overrightarrow{n_2}=(0,-2\sqrt{3},1)$，则 $\cos<\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_1}}{|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

所以二面角 $P-AD-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

21.已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-x-2a+1,a\in R$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)<0$.

【答案】详见解析；

【考点】含参函数单调性讨论；极值点定义及最值证明；

【解析】（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}-1=\dfrac{-x^2+x-a}{x^2}(x>0)$

$\Delta=1-4a$，$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{-2},x_2=\dfrac{-1-\sqrt{1-4a}}{-2}$

①当 $1-4a\le 0$，即 $a\ge\dfrac{1}{4}$ 时，$\Delta\le 0$，即 $f'(x)\le 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $0<1-4a<1$，即 $a\in(0,\dfrac{1}{4})$ 时，$0<x_1<x_2$，则 $f(x)$ 在 $(0,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递增；

③当 $1-4a\ge 1$，即 $a\in(-\infty,0]$ 时，$x_1<0<x_2$，则则 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增；

综上所述，当 $a\ge\dfrac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a\in(0,\dfrac{1}{4})$ 时，则 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}),(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递增；当 $a\in(-\infty,0]$ 时，则 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递增.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，则 $a\in(0,\dfrac{1}{4})$，且 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=a\end{cases}$，

$f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1+\dfrac{a}{x_1}-x_1-2a+1+\ln x_2+\dfrac{a}{x_2}-x_2-2a+1=\ln x_1x_2+\dfrac{a(x_1+x_2)}{x_1x_2}-(x_1+x_2)-4a+2=\ln a-4a+2$ 则令 $F(a)=\ln a-4a+2$，

$F'(a)=\dfrac{1}{a}-4$，因为 $a\in(0,\dfrac{1}{4})$，则 $F'(a)>0$，$F(a)$ 在 $(0,\dfrac{1}{4})$ 上单调递增，

则 $F(a)<F(\dfrac{1}{4})=1-\ln 4<0$，即 $f(x_1)+f(x_2)<0$，证毕.

22.在平面直角坐标系 xOy 中，已知直曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数 $a\neq 0$），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\text{-}2\rho\cos\theta+\frac{1}{4}=0$，曲线 C_1，C_2 有且只有一个公共点.

（1）求 a 的值

（2）设点 M 的直角坐标为 $(a,0)$，若曲线 C_1 与 C_3 $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$为参数）的交点为 A,B 两个不同的点，求 $|MA|\cdot|MB|$ 的值

【答案】:（1） a=2 （2） $|MA|\cdot|MB|=\frac{5}{7}$

【考点】：直线与圆位置关系，直线参数应用

【解析】:（1）曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 可化为 $l:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}a=0$，$C_2$ 的极坐标方程为 $\rho^2\text{-}2\rho\cos\theta+\frac{1}{4}=0$ 可化为 $(x-1)^2+y^2=\frac{3}{4}$，由曲线 C_1，C_2 有且只有一个公共点得圆心到直线的距离为 $\frac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}a|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a$=2

（2） $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$为参数）化为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，把 $\begin{cases} x=a+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 代入 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 得 $7t^2+at+a^2-9=0$，

设 A,B 参数分别为 t_1,t_2，所以 $t_1t_2=\frac{a^2-9}{7}=\text{-}\frac{5}{7}$ 即 $|MA|\cdot|MB|=\frac{5}{7}$

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-m|+|2x-1|, x\in R$

（1）当 $m=1$ 时，解不等式 $f(x)<2$；

（2）若不等式 $f(x)<3-x$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围

【答案】（1） $\{x|0<x<\frac{4}{3}\}$；（2） $(0,2)$

【考点】：绝对值不等式的解法、不等式恒成立求参数取值范围

【解析】:（1） $f(x)=|x-1|+|2x-1|$

①当 $x\geq 1$时， $f(x)=3x-2<2\Rightarrow 1\leq x<\frac{4}{3}$；

②当 $x\leq\frac{1}{2}$ 时， $f(x)=2-3x<2\Rightarrow 0<x\leq\frac{1}{2}$；

③当$\frac{1}{2}<x<1$时，$f(x)=1-x+2x-1=x<2\Rightarrow\frac{1}{2}<x<1$

综上可得原不等式的解集为$\{x|0<x<\frac{4}{3}\}$

（2）$f(x)=|x-m|+|2x-1|<3-x\Leftrightarrow|x-m|<3-x-|2x-1|$

①当$\frac{1}{2}\le x\le1$时，上式可化为：$|x-m|<3-x-2x+1=4-3x\Rightarrow3x-4<x-m<4-3x$，可得：$x<2-\frac{m}{2}$且$x<1+\frac{m}{4}$，从而$1<2-\frac{m}{2}$且$1<1+\frac{m}{4}$，则$0<m<2$；

②当$0\le x\le\frac{1}{2}$时，上式可化为：$|x-m|<3-x+2x-1=x+2\Rightarrow-x-2<x-m<x+2$，可得：$x>\frac{m}{2}-1$且$m>-2$，从而$0>\frac{m}{2}-1$且$m>-2$，则且$-2<m<2$；

综上可得实数m的取值范围为$(0,2)$