2018-2019 学年高三第一次模拟试题参考答案　数学(文科)

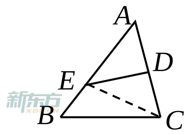
一．选择题：1.A　2.C　3.D.　4.B　5.A　6.D　7.D　8.A　9.B　10.B　11.A　12.C

二. 填空题：13. $(0,\dfrac{1}{4})$　　14. $\sqrt{3}$　　15. $3\ln 2-2$　　16. $\sqrt{22}$

三．解答题：

17. 解（Ⅰ）$\because a\sin A+(c-a)\sin C=b\sin B$，由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得 $a^2+c^2-ac=b^2$，

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，……………4 分



$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=60°$；……………6 分

（Ⅱ）连接 CE，$\because D$ 是 AC 的中点，$DE\perp AC$，$\therefore AE=CE$，

$\therefore CE=AE=\dfrac{DE}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A}$，……………7 分

在 ΔBCE 中，由正弦定理得 $\dfrac{CE}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin\angle BEC}=\dfrac{BC}{\sin 2A}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A\sin 60°}=\dfrac{2}{2\sin A\cos A}$，$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

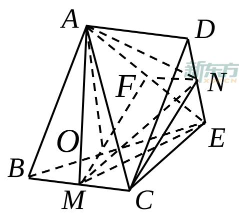
$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=45°$，　$\therefore \angle ACB=75°$，……………10 分

在 ΔABC 中，由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin A}$，$AB=\dfrac{BC\cdot\sin\angle ACB}{\sin A}=\dfrac{2\times\sin 75°}{\sin 45°}=\sqrt{3}+1$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.　……………12 分

18.（Ⅰ）证明：设 AE 的中点为 F，连接 MF,NF，

$\because N$ 是 DE 的中点，$\therefore FN//AD$，$FN=\dfrac{1}{2}AD$，………2 分



$\because ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD//BC$，$AD=BC$，

$\because M$ 是 BC 的中点，$\therefore FN//MC$，

$\therefore FN=MC=\dfrac{1}{2}BC$，$\therefore MCNF$ 是平行四边形，

$\therefore CN//MF$，$\therefore CN//$面 AEM；……………6 分

(Ⅱ)过点 A 作 $AO\perp BE$，O 为垂足，连接 AC，

$\because$面 $ABE\perp$面 BCE，$\therefore AO\perp$面 BCE，

$\because \Delta ABE$ 是等边三角形，$BE=2$，$AO=\sqrt{3}$，……………9 分

由(Ⅰ)得 $CN//$面 AEM，

$\therefore V_{N-AEM}=V_{C-AEM}=V_{A-CEM}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta MCE}\cdot AO=\dfrac{1}{12}BE\cdot CE\cdot AO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　…………12 分

19 解：（Ⅰ）由图 1 中频率分布直方图可知，从 2018 年成交的该种机械设备中使用时间 $x\in(12,16]$ 的台数为 $100\times 4\times 0.03=12$，使用时间 $x\in(16,20]$ 的台数为 $100\times 4\times 0.01=4$，…………2 分

$\therefore$按分层抽样所抽取 4 台中，使用时间 $x\in(12,16]$ 的设备有 3 台，分别记为 A,B,C；使用时间 $x\in(16,20]$ 的设备有 1 台，记为 d，

$\therefore$ 从这 4 台设备中随机抽取 2 台的结果为 (A,B)，(A,C)，(A,d)，(B,C)，(B,d)，(C,d)，共有 6 种等可能出现的结果，其中这 2 台设备的使用时间 x 都在 $[12,16]$ 结果为 (A,B)，(A,C)，(B,C)，共有 3 种，$\therefore$ 所求事件的概率为 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$；…………6 分

（Ⅱ）由题意得 $z=\ln y=\ln e^{bx+a}=bx+a$，

$$\because \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iz_i-10\overline{x}\overline{z}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2}=\frac{79.75-10\times5.5\times1.9}{385-10\times5.5^2}=-0.3,$$

$\hat{a}=\overline{z}-\hat{b}\overline{x}=1.9+0.3\times5.5=3.55$，

$\therefore z$ 关于 x 的线性回归方程为 $z=-0.3x+3.55$，…………10 分

$\therefore y$ 关于 x 的回归方程为 $y=e^{-0.3x+3.55}$，

$\therefore$ 当使用时间 $x=15$ 时，该种机械设备的平均交易价格的预报值为 $y=e^{-0.95}\approx0.39$ 万元.
…………12 分

20 解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}\times2bc=\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ …………3 分

$\therefore \begin{cases}c=1,\\ b=\sqrt{3},\\ a=2,\end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；…………6 分

（Ⅱ）设直线 MN 的方程为 $y=kx+m(k\neq0)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-3)=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-3)}{3+4k^2}$，…………8 分

$\because OMPN$ 是平行四边形，$\therefore \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$,

$\therefore x_0=x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$\therefore y_0=y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{6m}{3+4k^2}$，

$\therefore \dfrac{64k^2m^2}{4\times(3+4k^2)^2}+\dfrac{36m^2}{3\times(3+4k^2)^2}=1$，$\therefore 4m^2=3+4k^2$，

此时 $\Delta=(8km)^2-16(3+4k^2)(m^2-3)=48\times3m^2>0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{2k}{m}$，$x_1x_2=1-\dfrac{3}{m^2}$，

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{3\sqrt{1+k^2}}{|m|}$，…………10 分

点 O 到直线 MN 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{OMPN}=d\cdot|MN|=3$. …………12 分

21.(Ⅰ)解：由题意得 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-ax+(2-a)=-\dfrac{(x+1)(ax-2)}{x}$，$x>0$，………2 分

（1）当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 则 $0<x<\dfrac{2}{a}$；令 $f'(x)<0$ 则 $x>\dfrac{2}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{2}{a})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{2}{a},+\infty)$ 上单调递减；………6 分

(Ⅱ)证明：当 $a>0$ 时，$\because \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{2}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{1}{2}a(x_2+x_1)+(2-a)$，

$f'(x_0)=\dfrac{2}{x_0}-ax_0+(2-a)$

$\therefore \dfrac{2}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{1}{2}a(x_2+x_1)=\dfrac{2}{x_0}-ax_0$，……………7 分

$\because f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})-f'(x_0)=\dfrac{4}{x_2+x_1}-\dfrac{1}{2}a(x_2+x_1)-(\dfrac{2}{x_0}-ax_0)=\dfrac{4}{x_2+x_1}-\dfrac{2}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}$

$=\dfrac{2}{x_2-x_1}[\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}-\ln\dfrac{x_2}{x_1}]=\dfrac{2}{x_2-x_1}[\dfrac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}-\ln\dfrac{x_2}{x_1}]$，……………9 分

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，$g(t)=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$，$t>1$，则 $g'(t)=-\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，$\therefore g(t)<g(1)=0$，

$\therefore f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})-f'(x_0)<0$，$\therefore f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})<f'(x_0)$，……………11 分

设 $h(x)=f'(x)=\dfrac{2}{x}-ax+(2-a)$，$x>0$，则 $h'(x)=-\dfrac{2}{x^2}-a<0$，

$\therefore h(x)=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>x_0$. ……………12 分

22 解：（Ⅰ）$\because \rho=2\cos\theta$，$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $\therefore (x-1)^2+y^2=1$，

$\because \alpha$ 是曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 的参数，$\therefore C_1$ 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=t^2$，……2 分

$\because C_1$ 与 C_2 有且只有一个公共点，$\therefore |t|=\sqrt{2}-1$ 或 $|t|=\sqrt{2}+1$，

$\therefore C_1$ 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$ 或 $x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$；………5 分

（Ⅱ）$\because t$ 是曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 的参数，$\therefore C_1$ 是过点 $A(0,1)$ 的一条直线，………6 分

设与点 P,Q 相对应的参数分别是 t_1,t_2，把 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $(x-1)^2+y^2=1$ 得

$t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t+1=0$，$\therefore \begin{cases}t_1+t_2=-2\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4}),\\ t_1\cdot t_2=1,\end{cases}$ ………8 分

$\therefore \frac{1}{|AP|}+\frac{1}{|AQ|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=2\sqrt{2}\,|\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})|\le 2\sqrt{2}$，

当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 时，$\Delta=4(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-4=4>0$，

$\frac{1}{|AP|}+\frac{1}{|AQ|}$ 取最大值 $2\sqrt{2}$.………10 分

23（Ⅰ）解：$\because f(x)=|2x-1|+2|x+1|\le 5$，$\therefore |x-\frac{1}{2}|+|x+1|\le\frac{5}{2}$，

由绝对值得几何意义可得 $x=-\frac{3}{2}$ 和 $x=1$ 上述不等式中的等号成立，…………3 分

$\therefore$ 不等式 $f(x)\le 5$ 的解集为 $[-\frac{3}{2},1]$；…………5 分

（Ⅱ）由绝对值得几何意义易得 $f(x)=2(|x-\frac{1}{2}|+|x+1|)$ 的最小值为 3，

$\therefore 3\le 5+m-m^2$，$\therefore -1\le m\le 2$，$\therefore M=2$，$\therefore a^3+b^3=2$，…………7 分

$\because 2=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$a^2-ab+b^2\ge 0$，$\therefore a+b>0$，…………8 分

$\because 2ab\le a^2+b^2$，$\therefore 4ab\le(a+b)^2$，$\therefore ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$，

$\because 2=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]\ge\frac{1}{4}(a+b)^3$，$\therefore a+b\le 2$，

$\therefore 0<a+b\le 2$. …………10 分