# 2018-2019 学年度高三适应性(三)

# 理科数学参考答案及解析

一、选择题

1. D【解析】由已知$A=\{x|x\leqslant 0\}\cup\{x|x\geqslant 1\}$，故$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|0<x<1\}$，故选D.

2. D【解析】抛物线$y=4x^2$的标准方程为$x^2=\frac{1}{4}y$，故其焦点坐标为$\left(0,\frac{1}{16}\right)$，故选D.

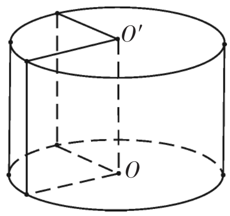
3. D【解析】$z=\frac{(1+ai)(1-2i)}{5}=\frac{1}{5}[(1+2a)+(a-2)i]$，由已知得$1+2a=0$，解得$a=-\frac{1}{2}$，故选D.

4. A【解析】函数$y=x\cos x$为奇函数，故排除B、D，当$x$取很小的正实数时，函数值大于零，故选A.

5. D【解析】由三视图可知，该几何体为圆柱挖去其$\frac{1}{6}$后的剩余部分，

该圆柱的底面半径为2，高为4.故其体积为圆柱体积的$\frac{5}{6}$，

$V=\frac{5}{6}\pi R^2h=\frac{5}{6}\times 16\pi=\frac{40\pi}{3}$，故选D.




(第5题答图)

6. D【解析】设双曲线$C$的方程为：$x^2-\frac{y^2}{4}=\lambda(\lambda\neq 0)$，则$1-\frac{9}{4}=\lambda$，即$\lambda=-\frac{5}{4}$.

故双曲线的方程为$\frac{y^2}{5}-\frac{4x^2}{5}=1$，故$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故选D.

7. C【解析】从这15个数中随机抽取3个整数所有基本事件个数为$C_{15}^3$，其中为勾股数为(3,4,5)，(6,8,10)，(9,12,15)，(5,12,13)4个，故概率为$P=\frac{4}{C_{15}^3}=\frac{4}{455}$，故选C.

8. C【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$，由$T_2=T_9$得：$a_6^7=1$，故$a_6=1$，即$a_1q^5=1$.

又$a_1a_2=a_1^2q=512$，所以$q^9=\frac{1}{512}$，故$q=\frac{1}{2}$.所以$T_8=T_3=a_2^3=\left(\frac{a_6}{q^4}\right)^3=2^{12}=4096$.故选C.

9. A【解析】当$x\geqslant 0$时，$f'(x)=(x+1)e^x$，故$f'(1)=2e$，$f(1)=e$，由函数$f(x)$为偶函数，所以$y=f(x)$的图象关于$y$轴对称，故$f'(-1)=-2e$，$f(-1)=e$，所求切线方程为：$y-e=-2e(x+1)$，即$2ex+y+e=0$.故选A.

10. C【解析】由$S_n+\frac{1}{S_n}+2=a_n(n\geqslant 2)$得$S_n=-\frac{1}{S_{n-1}+2}(n\geqslant 2)$.$S_1=-\frac{2}{3}$，$S_2=-\frac{3}{4}$，$S_3=-\frac{4}{5}$.

故$S_1+1=\frac{1}{3}$，$S_2+1=\frac{1}{4}$，$S_3+1=\frac{1}{5}$，$\frac{1}{S_1+1}=3$，$\frac{1}{S_2+1}=4$，$\frac{1}{S_3+1}=5$，故选C.

11. A【解析】$m=\log_{0.3}0.6>\log_{0.3}1=0$，$n=\frac{1}{2}\log_2 0.6<\frac{1}{2}\log_2 1=0$，$mn<0$.

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\log_{0.6}0.3+\log_{0.6}4=\log_{0.6}1.2<\log_{0.6}0.6=1$，即$\frac{m+n}{mn}<1$，故$m+n>mn$.

又$(m-n)-(m+n)=-2n>0$，所以$m-n>m+n$.

故$m-n>m+n>mn$，所以选A.

12. C【解析】由已知得$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.

当$\varphi=\frac{\pi}{4}$时，$\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以$\omega=-1+4k$，$(k\in\mathbf{N}^*)$.

若$\omega=3$时，$f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$有一个极大值点，不符合题意；

若$\omega=7$时，$f(x)=\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$内极大值点为$\frac{\pi}{28}$，小于极小值点$\frac{5\pi}{28}$，符合题意；

当$\omega=\frac{3\pi}{4}$时，$\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega+\frac{3\pi}{4}\right)=0$，所以$\omega=-3+4k$，$(k\in\mathbf{N}^*)$.

若$\omega=5$时，$f(x)=\sin\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$有一个极小值点，不符合题意；

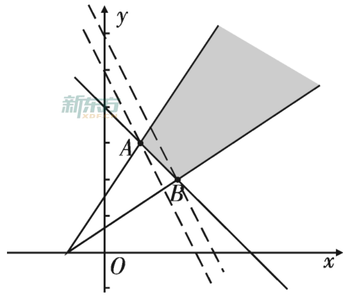
若ω=9时，$f(x)=\sin\left(9x+\frac{3\pi}{4}\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$极小值点$\frac{\pi}{12}$和极大值点$\frac{7\pi}{36}$，不符合题意.

综合上述：应选C.

二、填空题

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{4}$，$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{3}$.

$\boldsymbol{a}$与$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角的余弦值为$\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



（第 14 题答图）

14. 5 【解析】不等式满足的平面区域如图阴影部分，

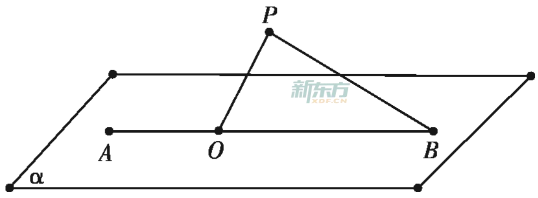
其中$A(1,3)$，$B(2,2)$，当动直线过点$A$时，$z_{\min}=5$.

15. 150 【解析】当一社区3人其他社区各一人时，

方案有$C_5^3A_3^3=60$（种）；当一社区1人其他社区各2人时，

方案有$\dfrac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$（种），

故不同的分配方案共有150种.



（第 16 题答图）

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】当平面$POB\perp\alpha$，且$OP\perp PB$时，

直线$PB$与$\alpha$平面所成的角$\theta$最大，

此时$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，所以$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题

（一）必考题

17. 解：(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}$. ………… 2分

$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$. ………… 4分

所以$f(x)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. ………… 6分

(2)由题设可得$\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又$0<A<\pi$，所以$\dfrac{\pi}{6}<2A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}$，

所以$2A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，故$A=\dfrac{\pi}{3}$. ………… 8分

设角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，则$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

所以$a=BC=\sqrt{7}$，又$\sin B=3\sin C$，所以$b=3c$. ………… 10分

故$7=9c^2+c^2-3c^2$，解得$c=1$.

所以$b=3$，$\triangle ABC$的周长为$4+\sqrt{7}$. ………… 12分

18. 解：(1)取$AC$，$A'C'$的中点$O$，$F$，连接$OF$与$A'C$交于点$E$，连接$DE$，$OB$，$B'F$，

则$E$为$OF$的中点，$OF/\!/AA'/\!/BB'$，且$OF=AA'=BB'$，所以$BB'FO$是平行四边形.

又$D$是棱$BB'$的中点，所以$DE/\!/OB$. ………… 3分

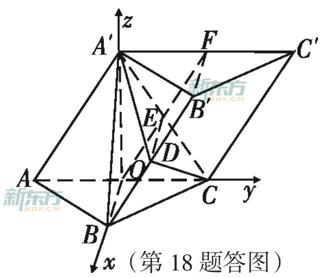
侧面$AA'C'C\perp$底面$ABC$，且$OB\perp AC$，所以$OB\perp$平面$ACC'A'$.

所以$DE\perp$平面$ACC'A'$.

又$DE\subset$平面$DA'C$，所以平面$DA'C\perp$平面$ACC'A'$. ………… 6分

(2)连接$A'O$，因为$\angle A'AC=60°$，所以$\triangle A'AC$是等边三角形.

设$AB=BC=CA=AA'=2$.



（第 18 题答图）

故$A'O\perp$底面$ABC$，由已知$A'O=OB=\sqrt{3}$，

以$OB$，$OC$，$OA'$分别为$x$，$y$，$z$轴建立空间直角坐标系.

则$A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A'(0,0,\sqrt{3})$. ………… 8分

$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}=(0,1,\sqrt{3})$.

设平面$BCC'B'$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB'}=0$.

所以$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\ y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$取$x=1$，$y=\sqrt{3}$，$z=-1$.

所以$\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-1)$. ………… 10分

又平面$ABC$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

故$\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

二面角$A-BC-B'$为钝角，所以其余弦值为$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 12分

19. **解**：(1)$\bar{x}=\dfrac{1}{100}(4\times24+9\times26+16\times28+24\times30+18\times32+14\times34+10\times36+5\times38)=31$，

$s^2=\dfrac{1}{100}(4\times7^2+9\times5^2+16\times3^2+24\times1+18\times1+14\times3^2+10\times5^2+5\times7^2)=12.28$. ………………………… 6分

(2)棉花的纤维长度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中$\mu=31$，$\sigma\approx\sqrt{12.28}\approx3.504$，

①利用正态分布，则$P(X>\mu-2\sigma)=1-\dfrac{1}{2}(1-0.9543)=0.97715$. ………………………… 9分

②$\mu-2\sigma=31-2\times3.504\approx23.992$，故$f(X>\mu-2\sigma)=f(Y>23.992)=1$.

故满足条件，所以认为该批优质棉花合格. ………………………… 12分

20. **解**：(1)设动点$P$的坐标为$(x,y)$.

则$P$到直线$l:x=4$的距离为$d=|x-4|$，又$|PF|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

由已知得$d=2|PF|$，所以$|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. ………………………… 2分

化简得：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，故曲线$C$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4分

(2)由(1)可得$A(-2,0)$，$B(2,0)$，设点$M$的坐标为$(1,m)$.

直线$MA$的方程为：$y=\dfrac{m}{3}(x+2)$，

将$y=\dfrac{m}{3}(x+2)$与$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$联立消去$y$整理得：

$(4m^2+27)x^2+16m^2x+16m^2-108=0$，

设点$D$的坐标为$(x_D,y_D)$，则$-2x_D=\dfrac{16m^2-108}{4m^2+27}$，

故$x_D=\dfrac{54-8m^2}{4m^2+27}$，则$y_D=\dfrac{m}{3}(x_D+2)=\dfrac{36m}{4m^2+27}$. ………………………… 7分

直线$MB$的方程为：$y=-m(x-2)$，

将$y=-m(x-2)$与$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$联立消去$y$整理得：

$(4m^2+3)x^2-16m^2x+16m^2-12=0$，

设点$E$的坐标为$(x_E,y_E)$，则$2x_E=\dfrac{16m^2-12}{4m^2+3}$，

故$x_E=\dfrac{8m^2-6}{4m^2+3}$，则$y_E=-m(x_E-2)=\dfrac{12m}{4m^2+3}$. ………………………… 10分

$QD$的斜率为$k_1=\dfrac{y_D}{x_D-4}=\dfrac{36m}{54-8m^2-4(4m^2+27)}=-\dfrac{6m}{4m^2+9}$；

$QE$的斜率为$k_2=\dfrac{y_E}{x_E-4}=\dfrac{12m}{8m^2-6-4(4m^2+3)}=-\dfrac{6m}{4m^2+9}$.

因为$k_1=k_2$，所以$Q,D,E$三点共线. ………………………… 12分

21. **解**：(1)函数$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-m=\dfrac{-mx+1-m}{x+1}$. ………………………… 2分

当$m\leqslant0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-m>0$，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增； ………………………… 3分

当$m>0$时，由$f'(x)=0$，得$x=-1+\dfrac{1}{m}$.

若$x\in\left(-1,-1+\dfrac{1}{m}\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

若$x\in\left(-1+\dfrac{1}{m},+\infty\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

综上：当$m\leqslant0$时，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增；

当$m>0$时，$f(x)$在$\left(-1,-1+\dfrac{1}{m}\right)$上单调递增，在$\left(-1+\dfrac{1}{m},+\infty\right)$上单调递减. ………………………… 5分

(2)当$x\geqslant0$时，$f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}x^2$等价于：当$x\geqslant0$时，$\ln(x+1)-mx-\dfrac{1}{2}x^2\leqslant0$.

令$g(x)=\ln(x+1)-mx-\frac{1}{2}x^2(x\geqslant 0)$，

$g'(x)=\frac{1}{x+1}-m-x=\frac{-x^2-(m+1)x+1-m}{x+1}$. ………………………………………… 6分

令$h(x)=-x^2-(m+1)x+1-m$，
判别式$\Delta=(m+1)^2+4(1-m)=m^2-2m+5>0$，
又$h(-1)=-1+(m+1)+1-m=1>0$.

故存在$x_0\in(-1,+\infty)$，使得$h(x_0)=0$，此时$m=\frac{1}{x_0+1}-x_0$. ………………………………………… 8分

随$x$的变化$g'(x)$与$g(x)$的变化情况如下：

| $x$ | $(-1,x_0)$ | $x_0$ | $(x_0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | 0 | – |
| $g(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

………………………………………………………………………………………… 10分

①当$x_0\in(-1,0]$时，$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，$g(x)\leqslant g(0)=0$满足条件.

此时$m=\frac{1}{x_0+1}-x_0\in[1,+\infty)$.

②当$x_0\in(0,+\infty)$时，$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，$g(x)>g(0)=0$不满足条件.

综合上述：当$x\geqslant 0$时，$f(x)\leqslant\frac{1}{2}x^2$，实数$m$的取值范围为$[1,+\infty)$. ………………………… 12分

(二)选考题

22. 解：(Ⅰ)消去参数$\alpha$，得到曲线$C$的标准方程为：$(x-2)^2+y^2=4$，………………………… 2分
故曲线的极坐标方程为：$\rho=4\cos\theta$. ………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)极坐标系$Ox$中，不妨设$A(\rho_1,\theta_0)$，$B\left(\rho_2,\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)$，其中$\rho_1>0$，$\rho_2>0$，$-\frac{\pi}{2}<\theta_0<\frac{\pi}{2}$.

由(Ⅰ)知：$\rho_1=4\cos\theta_0$，$\rho_2=4\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\triangle OAB$面积$S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\frac{\pi}{4}=4\sqrt{2}\cos\theta_0\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)$，………………………………… 8分

$S=4\cos^2\theta_0-4\sin\theta_0\cos\theta_0=2\cos2\theta_0-2\sin2\theta_0+2=2\sqrt{2}\cos\left(2\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)+2$.

当$2\theta_0=-\frac{\pi}{4}$时，即$\theta_0=-\frac{\pi}{8}$，$\cos\left(2\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)$有最大值1，此时$S_{max}=2+2\sqrt{2}$.

故$\triangle OAB$面积的最大值为$2+2\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 10分

23. 解：(Ⅰ)$f(x)=|2x-3|-|x+1|=\begin{cases}-x+4, & x<-1\\ -3x+2, & -1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\\ x-4, & x>\frac{3}{2}\end{cases}$ ………………………………… 2分

当$x<-1$时，$-x+4\leqslant 6$，得$x\geqslant -2$，故$-2\leqslant x<-1$；

当$-1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$时，$-3x+2\leqslant 6$，得$x\geqslant-\frac{4}{3}$，故$-1\leqslant x<\frac{3}{2}$；

当$x>\frac{3}{2}$时，$x-4\leqslant 6$，得$x\leqslant 10$，故$\frac{3}{2}<x\leqslant 10$.

综上可知，不等式$f(x)\leqslant 6$的解集为$\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$. ………………………………… 5分
(Ⅱ)由绝对值不等式的性质可知：$f(x)=|2x-3|-|x+1|\leqslant|3x-2|$，
即$|(3x-2)+(-x-1)|\leqslant|3x-2|+|x+1|$，由等号成立的条件可知，

$(3x-2)(-x-1)\geqslant 0$，解得$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$，故$M=\left[-1,\frac{2}{3}\right]$. ………………………………… 8分

$a^2+b^2+2a-2b=(a+1)^2+(b-1)^2-2$，

$a,b\in M$，所以$(a+1)^2\leqslant\frac{25}{9}$，$(b-1)^2\leqslant 4$.

所以$a^2+b^2+2a-2b=(a+1)^2+(b-1)^2-2\leqslant\frac{25}{9}+4-2<5$.

故$a^2+b^2+2a-2b<5$. ………………………………………………………………… 10分