2019 年全国新课标乙卷高考理科数学试卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$，$N=\{x|x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$

A.$\{x|-4<x<3\}$　　B. $\{x|-4<x<-2\}$

C.$\{x|-2<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

2.设复数 z 满足$|z-i|=1$，z 在复平面内对应的点为(x,y)，则

A.$(x+1)^2+y^2=1$　　B. $(x-1)^2+y^2=1$

C. $x^2+(y-1)^2=1$　　D. $x^2+(y+1)^2=1$

3．已知 $a=\log_2 0.2$， $b=2^{0.2}$， $c=0.2^{0.3}$， 则

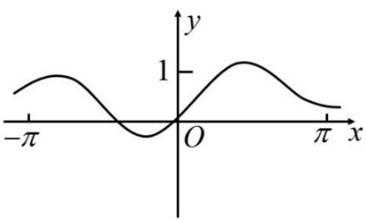
A． $a<b<c$　　B． $a<c<b$

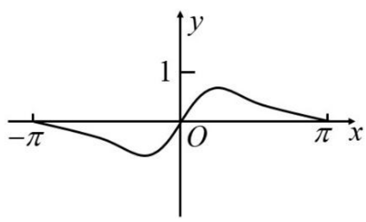
C． $c<a<b$　　D． $b<c<a$

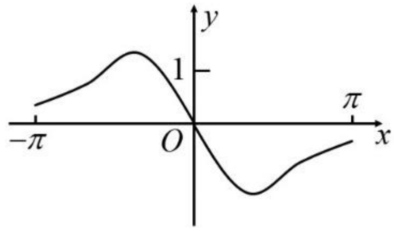
4.古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此.此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105cm，头顶至脖子下端的长度为 26cm，则其身高可能是

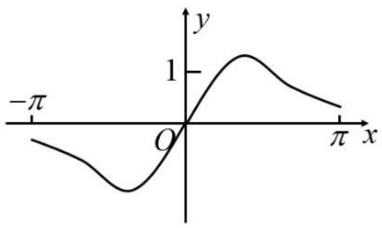
A.165cm　　B.175cm　　C.185cm　　D.190cm

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在$[-\pi,\ \pi]$的图像大致为

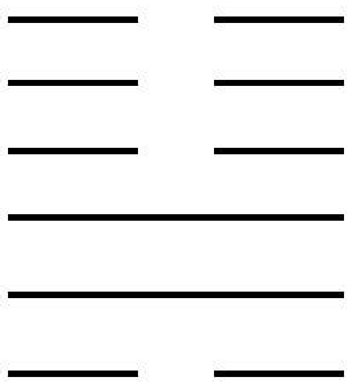
A.


B.


C. 

D. 

6．我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化，每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，右图就是一重卦，在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是

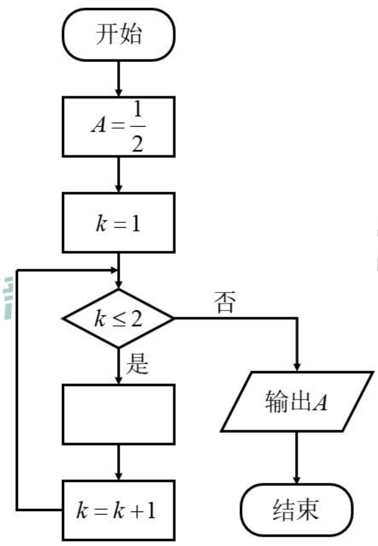


A．$\frac{5}{16}$　　B．$\frac{11}{32}$　　C．$\frac{21}{32}$　　D．$\frac{11}{16}$

7．已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

8. 右图是求$\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$的程序框图，图中空白框中应填入



A. $A=\dfrac{1}{2+A}$

B. $A=2+\dfrac{1}{A}$

C. $A=\dfrac{1}{1+2A}$

D. $A=1+\dfrac{1}{2A}$

9. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.已知$S_4=0$，$a_5=5$，则

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=2n^2-8n$　　D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10.已知椭圆C的焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过F_2的直线与C交于A,B两点。若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则C的方程为

A.$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B.$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

C.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D.$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数$f(x)=\sin|x|+|\sin x|$有下述四个结论：

①$f(x)$是偶函数　　②$f(x)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$单调递增

③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有 4 个零点　　④$f(x)$的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A.①②④　　B.②④　　C.①④　　D.①③

12.已知三棱锥$P-ABC$的四个顶点在球O的球面上，$PA=PB=PC$，ΔABC是边长为2的正三角形，E，F分别是PA，AB的中点，$\angle CEF=90^\circ$，则球O的体积为

A. $8\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{6}\pi$　　C. $2\sqrt{6}\pi$　　D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.曲线$y=3(x^2+x)e^x$在点(0,0)处的切线方程为__________ .

14.记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若$a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则$S_5=$________________.

15.甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）.根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”.设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4：1 获胜的概率是__________ .

16. 已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：60 分。

17．(12 分)

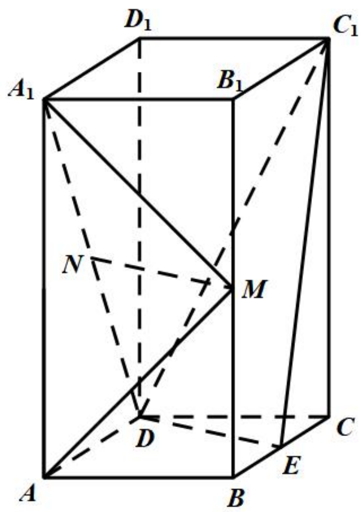
$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$．

(1)求 A；

(2)若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$．

18．(12 分)

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E,M,N 分别是 BC,BB_1,A_1D 的中点．



(1)证明：MN // 平面 C_1DE；

(2)求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值．

19．(12 分)

已知抛物线$C: y^2 = 3x$的焦点为F，斜率为$\frac{3}{2}$的直线l与C的交点为A,B，与x轴的交点为P．

(1)若$|AF|+|BF|=4$，求l的方程；

(2)若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求$|AB|$．

20．(12 分)

已知函数$f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$为$f(x)$的导数，证明：

(1) $f'(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点；

(2) $f(x)$有且仅有 2 个零点．

21．(12 分)

为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为α和β，一轮试验中甲药的得分记为X．

(1)求X的分布列；

(2)若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$ 表示"甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效"的概率，则 $p_0=0, p_8=1$，

$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$，其中 $a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，$c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5, \beta=0.8$．

(i)证明：$\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；

(ii)求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\frac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（t 为参数）.以坐标原点 O 为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho sin\theta+11=0$.

(1)求 C 和 l 的直角坐标方程；

(2)求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23.【选修 4-5】：不等式选讲

已知 a,b,c 为正数，且满足 $abc=1$.证明：

(1)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$；

(2)$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$.

2019 年全国新课标乙卷高考理科数学试卷答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	B	B	D	A	B	A	A	B	C	D

二、填空题

13. $y = 3x$

14. $\frac{121}{3}$

15. 0.18

16. 2

三、解答题

17.【答案】

(1) $A=\frac{\pi}{3}$

(2) $\sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

【解析】

(1)由 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$

得 $(b-c)^2=a^2-bc$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$

又因为 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，故 $A=\frac{\pi}{3}$

(2)因为 $\sqrt{2}a+b=2c$，所以 $\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$

即 $\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(\frac{2}{3}\pi-C)=2\sin C$

化简得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\frac{1}{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故 $\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

解得 $C=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ 或 $C=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$(舍)

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

18.【答案】

(1)见解析

(2)$\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

(1)如图，连接 ME,B_1C

$\because M,E$ 分别是 BB_1,CC_1 的中点

$\therefore ME$ 平行且等于 $\frac{1}{2}B_1C$

$\because N$ 是 A_1D 的中点

$\therefore ND=\frac{1}{2}A_1D$

在直棱柱中，$A_1D=B_1C$

$\therefore ME$ 平行且等于 ND

$\therefore$ 四边形 $MEND$ 是平行四边形，$MN\parallel DE$

又 $\because MN\not\subset$ 平面 $C_1DE, DE\subset$ 平面 C_1DE

$\therefore MN\parallel$ 平面 C_1DE

(2)$\because \angle BAD=60^\circ$，四边形 $ABCD$ 为菱形，则作 $DF\perp DC$ 交 AB 于 F 点，则 $AF=1$，

且 $AF\perp DF, DF=\sqrt{3}$，$\therefore$ 以 DF 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，

可得以下坐标：$A(\sqrt{3},-1,0), M(\sqrt{3},1,2), N(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2), A_1(\sqrt{3},-1,4)$

设平面 AMA_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 NMA_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\therefore \overrightarrow{AM}=(0,2,2),\overrightarrow{MA_1}=(0,-2,2),\overrightarrow{NA_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-2)$

则 $\begin{cases}2y_1-2z_1=0\\2y_1+2z_2=0\end{cases}$，可得一个 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$，同理可得 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},1,1)$

设 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 的夹角为 θ，

$\therefore |\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

19.【答案】

(1) $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$

(2) $|AB|=\frac{4\sqrt{13}}{3}$

【解析】(1)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由 $|AF|=x_1+\frac{p}{2},|BF|=x_2+\frac{p}{2}$ 得 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$

设直线方程为 $y=\frac{3}{2}x+t$

得 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+t\\y^2=3x\end{cases}\Rightarrow 9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4(t-1)}{3},x_1x_2=\frac{4t^2}{9}$

$\therefore |AF|+|BF|=-\frac{4(t-1)}{3}+\frac{3}{2}=4$

$\therefore t=-\frac{7}{8}$

故直线方程为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$

(2) $\because A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

设直线 $y=\frac{3}{2}x+t\quad \therefore P(-\frac{2}{3}t,0)$

得 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+t \\ y^2=3x \end{cases} \Rightarrow y^2-2y+2t=0$

$\therefore y_1+y_2=2, y_1y_2=2t$

$\because \overrightarrow{AP}=(-\frac{2}{3}t-x_1,-y_1), \overrightarrow{PB}=(x_2+\frac{2}{3}t,y_2)$ 且 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$

$\therefore y_1=-3y_2$

故 $y_1=3, y_2=-1$

$\therefore |AB|=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$

20.【答案】

(1)见解析

(2)见解析

【解析】

(1) $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}(x>-1)$

$f''(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}(x>-1)$

$\because$ 当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h(x)=-\sin x$ 与 $g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 均有减函数，且连续，

$\therefore f''(x)=h(x)+g(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，且连续

由于 $f''(0)=1>0, f''(\frac{\pi}{2})=-1+\frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^2}<0$，

可得知有且仅有 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f''(x_0)=0$

即

x	$(-1,x_0)$	x_0	$(x_0,\frac{\pi}{2})$
$f''(x)$	>0	0	<0
$f'(x)$	↗	极大值	↘

综上，$f'(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点$x_0$

(2) $f(x)=\sin x-\ln(1+x)=0\Rightarrow \sin x=\ln(1+x)$

由于$-1\le\sin x\le1$，故当$-1\le\ln(1+x)\le1$, 即$\frac{1}{e}-1\le x\le e-1$时，可能存在零点，

只需讨论在$\left[\frac{1}{e}-1,e-1\right]$上的零点个数即可

①当$x\in\left[\frac{1}{e}-1,0\right)$时，$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，$\because\cos x$与$-\frac{1}{x+1}$均在$\left[\frac{1}{e}-1,0\right]$单调递增，

故$f'(x)$在$\left[\frac{1}{e}-1,0\right)$单调递增，又$\because f'(0)=0$，$\therefore f'(x)<0,x\in\left[\frac{1}{e}-1,0\right)$,

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{1}{e}-1,0\right)$上单调递减，又$\because f(0)=0$，故$f(x)$在$\left[\frac{1}{e}-1,0\right)$上无零点

②当$x=0$时,，$f(0)=0$，$\therefore x=0$为$f(x)$的一个零点

③当$0<x\le e-1$时，$f(e-1)=\sin(e-1)-1$，$\because\sin(e-1)<1,\therefore f(e-1)<0$

由(1)可知，存在$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得$f''(x_0)=0$，且$f'(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,e-1)$上单调递减，而$f'(0)=0,f'(e-1)<f'(\frac{\pi}{2})=0-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}<0$，$\therefore f'(e-1)<0$

故$f'(x)$在上必存在 1 个零点x_1，使得$f'(x_1)=0,$其中$0<x_1<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore f(x)$在$(0,x_1)$上单调递增，在$(x_1,e-1)$上单调递减，

且$f(0)=0,f(e-1)<0$

故$f(x)$在$(0,e-1)$上有且仅有 1 个零点

综上，$f(x)$有且仅有 2 个零点.

21.【答案】

(1)见解析

(2)见解析

【解析】

(1) $X=1,0,-1$

$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$

$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$

$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$

X	1	0	-1
P	$\alpha(1-\beta)$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$(1-\alpha)\beta$

(2)(i) $a=P(X=-1)=(1-\alpha)\beta=0.5\times0.8=0.4$

$b=P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$

$c=P(X=1)=\alpha(1-\beta)=0.5\times0.2=0.1$

$\therefore P_i=0.4P_{i-1}+0.5P_i+0.1P_{i+1}$

$0.1(P_{i+1}-P_i)=0.4(P_i-P_{i-1})$

$\frac{P_{i+1}-P_i}{P_i-P_{i-1}}=\frac{0.4}{0.1}=4$

$\therefore\{P_{i+1}-P_i\}$为公比为 4 的等比数列.

(ii)设数列$\{P_{i+1}-P_i\}$的首项为m

根据$P_1-P_0=m$

$P_2-P_1=4m$

$P_3-P_2=4^2m$

$\vdots$

$P_8-P_7=4^7m$

且$P_0=0, P_8=1$，可得$P_8-P_0=m(1+4+4^2+\cdots+4^7)$，

可得$m=\dfrac{3}{4^8-1}$，$\therefore P_4-P_0=m(1+4+4^2+4^3)$，$P_4=P_0+m(1+4+4^2+4^3)=\dfrac{1}{257}$

故试验合理.

经过试验后，甲分值与起始一致，说明治愈可能性低，不能判断甲有效.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.【答案】

(1)见解析

(2)见解析

【解析】（1）曲线 C$\begin{cases} x=\frac{1-t^2}{1+t^2} & ① \\ y=\frac{4t}{1+t^2} & ② \end{cases}$

由①易得：$1+t^2=\frac{2}{x+1}$　　$(x\neq-1)$　　则$t^2=\frac{1-x}{x+1}$

由②易得：$y^2=\frac{16t^2}{(1+t^2)^2}$　　则$y^2=\frac{16\cdot\frac{1-x}{x+1}}{\frac{4}{(1+x)^2}}=4(1-x^2)$

整理得$\frac{y^2}{4}+x^2=1$　　$(x\neq-1)$

曲线 C 得直角坐标方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$　　$(x\neq-1)$

直线 l 的直角坐标方程 $2x+\sqrt{3}y+11=0$

（2）由（1）得 C：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$　　$(x\neq-1)$

设曲线 C 上一点 P(cosθ,2sinθ)　　$(\theta\in[0，\pi)\cup(\pi，2\pi])$

P 到 l 的距离 $d=\frac{|2cos\theta+2\sqrt{3}sin\theta+11|}{\sqrt{7}}=\frac{\left|4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+11\right|}{\sqrt{7}}$

当$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，即$\theta=\frac{4}{3}\pi$时，$d_{min}=\frac{|-4+11|}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}$

因此 C 上点到直线 l 距离最小值为$\sqrt{7}$.

23.【答案】

(1)见解析

(2)见解析

【解析】（1）$\because abc=1$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=bc+ac+ab$

要证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq a^2+b^2+c^2$

只需证：$bc+ac+ab\leq a^2+b^2+c^2$

只需证：$2bc+2ac+2ab\leq 2a^2+2b^2+2c^2$

$\because a^2+b^2-2ab+a^2+c^2-2ac+b^2+c^2-2bc=(a-b)^2+(a-b)^2+(a-b)^2\geq 0$

$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+ac+bc)\geq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$(当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等)

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$

$\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$\geq 3\cdot 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}$

$\geq 24\sqrt{abc}=24$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等.