2018-2019 学年太原市高一下学期期末数学试卷

数学试卷分析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\left(n>1,n\in N^*\right)$，则$a_3=$（　　）

A. 2　　　　B. $\dfrac{3}{2}$　　　　C. $\dfrac{5}{3}$　　　　D. $\dfrac{8}{5}$

考点：数列的递推关系式

答案：B

解析：数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\left(n>1,n\in N^*\right)$，

则$a_2=1+1=2$，$a_3=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，

所以 B 选项是正确的.

2. 已知$a=\sqrt{2}+\sqrt{7},b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a=b$　　　　B. $a>b$　　　　C. $a<b$　　　　D.不能确定

考点：数列的递推关系式

答案：C

解析：$\because a=\sqrt{2}+\sqrt{7},b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$，

$\therefore a^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^2=9+2\sqrt{14}$，$b^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2=9+2\sqrt{18}$;

$\because \sqrt{14}<\sqrt{18}$,

$\therefore a^2<b^2,\therefore a<b$.故选 C .

3. 已知集合 $A=\{x|(x-3)(x+1)<0\}$，$B=\{x|2x+1>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},3\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},3\right)$

考点：集合间的运算

答案：D

解析：$\because A=\{x|(x-3)(x+1)<0\}$，$B=\{x|2x+1>0\}$

$\therefore A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\left\{x\middle|x>-\frac{1}{2}\right\}$

$\therefore A\cap B=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<3\right\}$

故选 D.

4. 在 ΔABC 中，若 $BC=2\sqrt{3},AC=5,\angle C=30^\circ$，则 $AB=$（　　）

A. $\sqrt{7}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{19}$　　D. $\sqrt{37-10\sqrt{3}}$

考点：余弦定理

答案：A

解析：$\because BC=2\sqrt{3},AC=5,\angle C=30^\circ$

由余弦定理可得：

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 30^\circ$$
$$=5^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times5\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=7$$

$\therefore AB=\sqrt{7}$，故选 A.

故选 A.

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$a_1=1,a_4+a_6=18,$则$S_5=$（　　）

A. 25　　B. 39　　C. 45　　D. 54

考点：等差数列的性质

答案：A

解析：已知$a_4+a_6=18$，由等差数列性质可知$a_5=9$，

又$a_1=1$，

$S_5=\dfrac{(a_1+a_5)\cdot 5}{2}=25$，故选 A.

6.若$a,b,c\in R$，则下列结论正确的是（　　）

A.若$a>b$，则$ac^2>bc^2$　　B.若$a<b$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

C.若$a>b,c>d$，则$ac>bd$　　D.若$a>b$，则$a-c>b-c$

考点：不等式的性质

答案：D

解析：对于 A 选项，若$c=0$,此时不成立，

对于 B 选项，若$a=-2,b=-1$，此时不成立，

对于 C 选项，若$a=-1,b=-2,c=-3,d=-4$，此时不成立；

对于 D 选项，根据不等式的性质，正确.

故选 D.

7. ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若ΔABC的面积为$\dfrac{1}{2}a^2t$，则$t=$（　　）

A. $\dfrac{\sin A\sin B}{\sin C}$　　B. $\dfrac{\sin A\sin C}{\sin B}$　　C. $\dfrac{\sin B\sin C}{\sin A}$　　D. $\dfrac{\sin B\sin C}{\cos A}$

答案：C

考点：正弦定理、三角面积公式

解析：$\because$ 三角形面积为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

又由正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

$\therefore b=\frac{a\sin B}{\sin A}$，将 b 代入三角形面积公式中

即 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\sin C=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\cdot\sin C}{\sin A}$ $\therefore t=\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$

故选：C

8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_1=18,S_2=24$，则 $S_4=$（　　）

A. $\frac{76}{3}$　　B. $\frac{79}{3}$　　C. $\frac{80}{3}$　　D. $\frac{82}{3}$

答案：C

考点：等比数列前 n 项公式

解析：由 $S_1=18,S_2=24$，得 $a_1=18,a_1+a_2=24$，所以 $a_2=6$

所以等比数列公比为：$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

$\therefore S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{80}{3}$

故选：C

9. 三角形的一个角为 60°，夹这个角的两边之比为 8:5，则这个三角形的最大角的正弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{7}$　　C. $\frac{5\sqrt{3}}{14}$　　D. $\frac{8}{7}$

考点：正余弦定理

答案：B

解析：不妨设夹这个角的两边b,c 分别为$8k$，$5k$ $(k>0)$，其对边为a，

由余弦定理可得$\cos 60^\circ=\dfrac{(8k)^2+(5k)^2-a^2}{2\cdot 8k\cdot 5k}=\dfrac{1}{2}$，解得$a=7k$.

显然边b对应的正弦值最大，由正弦定理可知$\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{8k}{\sin B}$，解得$\sin B=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

故选 B.

10. 在ΔABC中，若$\dfrac{\sin A}{k}=\dfrac{\sin B}{3}=\dfrac{\sin C}{4}$，则下列结论错误的是（ ）

A. 当$k=5$时，ΔABC是直角三角形　　B. 当$k=3$时，ΔABC是锐角三角形

C. 当$k=2$时，ΔABC是钝角三角形　　D. 当$k=1$时，ΔABC是钝角三角形

考点：正弦定理

答案：D

解析：$\because\dfrac{\sin A}{k}=\dfrac{\sin B}{3}=\dfrac{\sin C}{4}$，由正弦定理得：$\dfrac{a}{k}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}$，设$\dfrac{a}{k}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}=\lambda$

当$k=1$时，即$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}=\lambda$，$\therefore a=\lambda,b=3\lambda,c=4\lambda$，

$\therefore a+b=c$，两边之和等于第三边，则无法构成三角形，$\therefore$选 D

11. 已知正数a,b满足$ab=a+b+3$，则ab的最小值是（ ）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

考点：基本不等式

答案：A

解析：由$\because a+b\ge 2\sqrt{ab}, ab=a+b+3, \therefore ab-3\ge 2\sqrt{ab}, \therefore (ab)^2-6ab+9\ge 4ab$,即

$\therefore (ab)^2-10ab+9\ge 0$,解得$ab\le 1$或$ab\ge 9$,$\because a>0, b>0, ab=a+b+3$,

$\therefore ab\le 1$不成立,$\therefore ab\ge 9$,当且仅当$a=b$时ab 取得最小值为9,选 A。

12. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}\cdot a_n=2^n\left(n\in N^*\right)$，$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则（　　）

A. $a_{2019}=2^{2019}$　　B. $a_{2019}=2^{1010}$　　C. $S_{2019}=2^{1010}-3$　　D. $S_{2019}=2^{1011}-3$

考点：求数列通项公式及前n项和

答案：D

解析：$\because a_1=1, a_{n+1}\cdot a_n=2^n\left(n\in N^*\right)\therefore a_2\cdot a_1=2, \therefore a_2=2$

$\because a_{n+1}\cdot a_n=2^n\left(n\in N^*\right)\therefore a_{n+2}a_{n+1}=2^{n+1}\ \therefore \dfrac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2$

$\therefore\{a_n\}$奇数项为首项为 1，公比为 2 的等比数列，偶数项为首项为 2，公比为 2 的等比数列。

设两个新数列分别为$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，前n项和为T_n、U_n。

$\therefore a_{2019}=b_{1010}=a_1q^{1010-1}=1\times 2^{1009}=2^{1009}$

$S_{2019}=T_{1010}+U_{1009}=\dfrac{1\times(1-2^{1010})}{1-2}+\dfrac{2\times(1-2^{1009})}{1-2}=2^{1011}-3$

所以答案选 D

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

13. 若数列的前 4 项分别是$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16}$，则它的一个通项公式是________.

考点：等比数列的通项公式

答案：$\frac{1}{2^n}$

解析：由已知数列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$可得，

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$，$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$，$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$，

所以数列是一个以$\frac{1}{2}$为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

所以这个等比数列的通项公式是$a_n=\frac{1}{2^n}$.

14. 锐角ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$b=2a\sin B$，则$A=$________.

考点：解三角形

答案：$30°$

解析：因为在锐角ΔABC中，$b=2a\sin B$，

由正弦定理，得$\sin B=2\sin A\sin B$,

所以$\sin A=\frac{1}{2}$,又$0°<A<90°$,

所以$A=30°$.

15. 《莱茵德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一，书中有一道这样的题目:把100个面包分给5个人，使每个人所得成等差数列，且使较大的三份之和的$\frac{1}{7}$是较小的两份之和，则最小的1份为_______.

考点：等差数列

答案：$\frac{5}{3}$

解析：设每个人分到的面包数按从小到大依次记为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ，则最小的一份为 a_1

$\because a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ 成等差数列，设公差为 d ，

根据题意可得 $\begin{cases}\frac{1}{7}(a_3+a_4+a_5)=a_1+a_2\\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=100\end{cases}$ ，解得 $a_1=\frac{5}{3}$ ，即最小的一份为 $\frac{5}{3}$.

16. 已知 ΔABC 中， $BC=2$ ， $AB=2AC$ ，则 ΔABC 面积的最大值为

考点：解三角形面积的最值问题

答案：$\frac{4}{3}$

解析：设 $AC=x$ ，则 $AB=2x$ ，则根据面积公式

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=x\cdot\sin C=x\cdot\sqrt{1-\cos^2C}$ ，由余弦定理可得 $\cos C=\frac{4-3x^2}{4x}$

$$S_{\Delta ABC}=x\cdot\sqrt{1-\cos^2C}=x\sqrt{1-\left(\frac{4-3x^2}{4x}\right)^2}=\sqrt{\frac{\frac{2176}{36}-\left(3x^2-\frac{40}{6}\right)^2}{16}}$$

根据三边关系：$\begin{cases}2x+x>2\\ x+2>2x\end{cases}$ ，解得 $\frac{2}{3}<x<2$ ，故当 $x=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 时， $S_{\Delta ABC}\le\frac{4}{3}$

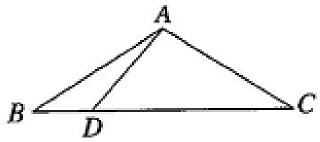
三、解答题（本大题共 5 小题，共 52 分）

17.（本小题满分 10 分）

如图，在ΔABC中，$AB=AC=2, BC=2\sqrt{3}$，点D在BC边上，$\angle ADC=45^\circ$

（1）求$\angle BAC$的度数；

（2）求AD的长度.



考点： 正余弦定理

解析：（1）根据余弦定理：$\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=-\dfrac{1}{2}$ $\therefore \angle BAC=120^\circ$

（2）由（1）可知$\angle ACB=30^\circ$

在ΔADC中，依正弦定理：$\dfrac{AD}{\sin 30^\circ}=\dfrac{AC}{\sin 45^\circ}$，$\therefore AD=\sqrt{2}$

18.（本小题满分 10 分）

已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且S_1,S_3,S_2成等差数列，

（1）求数列$\{a_n\}$的公比q；

（2）若$a_1-a_3=6$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

考点：数列的综合应用

解析：（1）因为S_1,S_3,S_2成等差数列，即$a_1+(a_1+a_2)=2(a_1+a_2+a_3)$

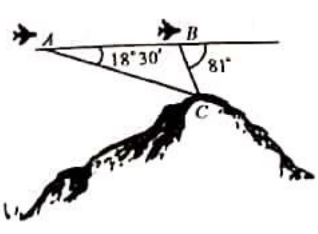
$a_2+2a_3=0 \therefore q=-\dfrac{1}{2}$

（2）因为$a_1-a_3=6$，即$a_1(1-q^2)=6$，将$q=-\dfrac{1}{2}$代入，得$a_1=8$，

所以$a_n=a_1q^{n-1}=8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}2^{4-n}$，所以通项公式为$a_n=(-1)^{n-1}2^{4-n}$

19.（本小题满分 10 分）

如图，飞机的航线和山顶在同一个铅垂平面内，已知飞机的高度为海拔 20250m，速度为



$1000km/h$，飞行员在A处先看到山顶C的俯角为$18^{\circ}30'$，经过$150s$后又在B处看到山顶C的俯角为81°

（1）求飞机在B处与山顶C的距离（精确到$1m$）；

（2）求山顶的海拔高度（精确到$1m$）

参考数据：$\sin 18.5^{\circ} \approx 0.32, \cos 18.5^{\circ} \approx 0.95$

$\sin 62.5^{\circ} \approx 0.89, \cos 62.5^{\circ} \approx 0.46$

$\sin 81^{\circ} \approx 0.99, \cos 81^{\circ} \approx 0.16$

考点：解三角形

解析：（1）飞机在 150 秒内飞行的距离是 $AB = 1000 \times 1000 \times \frac{150}{3600}$ m

在ΔABC中，根据正弦定理，得$\frac{AB}{\sin(81^{\circ} - 18.5^{\circ})} = \frac{BC}{\sin 18.5^{\circ}}$

解得$BC \approx 14981m$

（2）飞机、山顶的海拔的差为

$BC \times \sin 81^{\circ} \approx 14831(m)$

所以$20250 - 14831 \approx 5419m$

即山顶的海拔高度为$5419m$

20.（本小题满分 10 分）说明：请同学们在（A）、（B）两个小题中任选一题作答.

（A）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1} = 2 + a_n$，数列$\{b_n\}$满足$2b_{n+1} - b_n = 0$，且$a_1 = b_1 = 1, n \in N^*$

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

（2）求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和S_n .

考点：数列

解析：（1）由$a_{n+1}=2+a_n$得$a_{n+1}-a_n=2$，得$\{a_n\}$是以2为公差的等差数列，

而$a_1=1$，故$a_n=2n-1$；又$2b_{n+1}-b_n=0$，即$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ ，

可知$\{b_n\}$是以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

而$b_1=1$，故$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

（2）因为$a_n\cdot b_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

故$S_n=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$ ，

$\frac{1}{2}S_n=\quad\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$

两式相减可得

$$\frac{1}{2}S_n=1+2\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}=1+2\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$

所以$S_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$

20.（B）已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$满足$S_n+b_n=2$，其中$S_n$为$\{b_n\}$的前$n$项

和，且$a_1=b_1=1,n\in N^*$

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式

（2）求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和S_n.

考点：数列求通项、求和

解析：（1）由$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$，同乘以$a_n\cdot a_{n+1}$得$a_{n+1}-a_n=2$

可知$\{a_n\}$是以2为公差的等差数列，而$a_1=1$，故$a_n=2n-1$；

又$S_n+b_n=2,\therefore S_{n-1}+b_{n-1}=2(n\geq 2)$,相减得：$2b_n-b_{n-1}=0,\therefore b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$

可知$\{b_n\}$是以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，而$b_1=1$，故$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

（2）因为$a_n\cdot b_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

$$\therefore T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$$

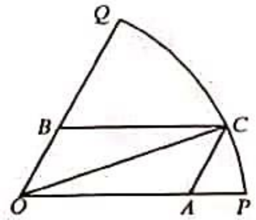
两式相减得

$$\frac{1}{2}T_n=1+2\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$$

$$\therefore T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$$

21.（本小题满分12分）说明：请同学们在（A）、（B）两个小题中任选一题作答.

（A）如图，已知 OPQ 是半径为 1，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形，C 是扇形弧上的动点，点 A,B 分别在半径 OP,OQ 上，且 $OACB$ 是平行四边形，记 $\angle COP=\alpha$，四边形 $OACB$ 的面积为 S，问当 α 取何值时，S 最大？S 的最大值是多少？



考点：基本不等式

解析：设 $OA=x,OB=y$，

在 ΔOAC 中，由余弦定理得：$x^2+y^2+xy=1$，

由基本不等式，$1=x^2+y^2+xy\geq 3xy, xy\leq\frac{1}{3}$，

而 $S=xy\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}xy\leq\frac{\sqrt{3}}{6}$，当 $x=y$ 时取等号，此时 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，

所以当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，S 最大，最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

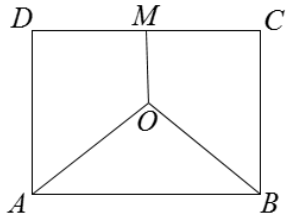
（B）如图，某地三角工厂分别位于边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的两个顶点 A,B 及 CD 中点 M 处。为处

理这三角工厂的污水，在该正方形区域内（含边界）与A,B等距的点O处建一个污水处理厂，并铺设三条排污管道AO,BO,MO，记铺设管道总长为y千米.

（1）按下列要求建立函数关系式：

（i）设$\angle BAO=\theta$，将y表示成θ的函数;

（ii）设$MO=2-x$，将y表示成x的函数;



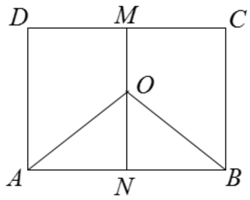
（2）请你选用一个函数关系，确定污水厂位置，使铺设管道总长最短.

考点：基本不等式

解析：

（1）(i) 设AB中点N,则$AN=1,ON=\tan\theta,OA=\dfrac{1}{\cos\theta},MO=2-\tan\theta$

$y=\dfrac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+2$（$0\le\theta\le\theta_0$，其中$\tan\theta_0=2$ ）.



（ ii ）$\because MO=2-x,\therefore ON=x,AO=\sqrt{x^2+1}$

$\therefore y=2\sqrt{x^2+1}-x+2,\left(0\le x\le 2\right).$

（2）设$m=\sqrt{x^2+1}+x,n=\sqrt{x^2+1}-x,\left(m,n>0\right)$，则$mn=1$.

$\therefore y=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{3}{2}n+2\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{4}mn}+2=\sqrt{3}+2.$

当$m=3n$，即$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，y取最小值$2+\sqrt{3}$.

所以污水厂设在与直线AB距离$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$处时，铺设管道总长最短，最短长度为$2+\sqrt{3}$千米.