太原师院附中　师苑中学 2019～2020 学年高一第一次月考

数学试题

出题人：潘瑞平　　　　　　　　　审核人：白鹏恩

（考试时间：120 分钟　　试卷满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知集合 $M=\{x|-3\le x\le 2\}$， $N=\{x|x(x-3)\le 0,x\in Z\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(0,2]$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

【答案】D

【难度】易

【考点】解不等式与集合运算

【解析】$\because x(x-3)\le 0$ ，$\therefore 0\le x\le 3$，又$\because x\in Z$，故 $N=\{0,1,2,3\}$，

$\therefore M\cap N=\{0,1,2\}$.

故选 D.

2. 满足 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,5\}$ 的所有集合 A 的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】D

【难度】易

【考点】集合运算与子集个数

【解析】由题可知，集合 A 中必含有 5，可能含有 1 或 3，所以个数为 $2^2=4$.

故选 D.

3. 下列函数中是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=|x|$　　C. $y=x+\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x$

【答案】D

【难度】易

【考点】常见函数单调性与奇偶性

【解析】A 选项：$y=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，但在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

B 选项：$y=|x|$ 是偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

C 选项：$y=x+\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增；

D 选项：$y=x$ 是奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

故选 D.

4. 下列每组函数是同一函数的是(　　)

A. $f(x)=x-1, g(x)=(\sqrt{x-1})^2$　　B. $f(x)=|x-3|, g(x)=\sqrt{(x-3)^2}$

C. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}, g(x)=x+2$　　D. $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)}, g(x)=\sqrt{x-1}\bullet\sqrt{x-3}$

【答案】B

【难度】易

【考点】相同函数判断

【解析】A 选项：$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域是 $[1，+\infty)$，定义域不同，它们的对应法则也不同；故不是同一函数；

B 选项：两个函数的定义域相同，$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$g(x)=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$，两个函数的对应法则相同，是同一函数；

C 选项：两个函数的定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty，2)\cup(2，+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$；故不是同一函数；

D 选项：定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty，1]\bigcup[3，+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $[3，+\infty)$，故不是同一函数；

只有 B 选项符合同一函数的要求，

故选：B.

5. 已知 $f(x)=ax^5+bx^3+cx-8$，且 $f(-2)=4$，那么 $f(2)=$（　　）

A. -20　　B. 10　　C. -4　　D. 18

【答案】A

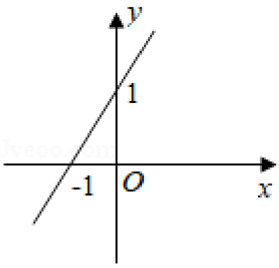
【难度】易

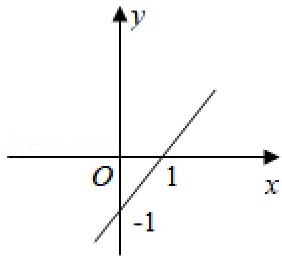
【考点】函数奇偶性应用

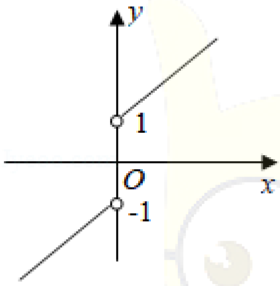
【解析】由题可知，$f(x)+f(-x)=-16$，$\therefore f(2)=-16-f(-2)=-16-4=-20$.

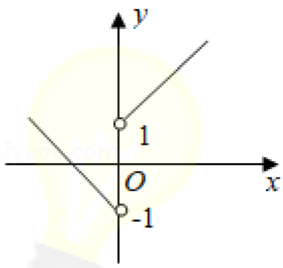
故选 A.

6. 函数 $y=x+\frac{|x|}{x}$ 的图象是图中的(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【难度】易

【考点】分段函数图象

【解析】定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$x>0$ 时，$y=x+1$；$x<0$ 时，$y=x-1$；

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x+1, x>0\\ x-1, x<0\end{cases}.$$

故选 C.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x-2,(x\geq 10)\\ f[f(x+6)],(x<10)\end{cases}$，则 $f(5)$ 的值为(　　)

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

【答案】B

【难度】易

【考点】分段函数求值

【解析】 $f(5)=f\left[f(11)\right]=f(9)=f\left[f(15)\right]=f(13)=11$.

故选 B.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-5(x\leq 1)\\ \frac{a}{x}(x>1)\end{cases}$ 是 **R** 上的增函数，则 a 的取值范围是(　　)

A. $-3\leq a<0$　　B. $-3\leq a\leq -2$　　C. $a\leq -2$　　D. $a<0$

【答案】B

【难度】中

【考点】分段函数单调性应用

【解析】由题可知，$\begin{cases} -\dfrac{a}{2}\geq 1 \\ a<0 \\ -6-a\leq a \end{cases}$，$\therefore -3\leq a\leq -2$.

故选 B.

9. 已知 $f(x)$ 的定义域为$[-2，2]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x-1)}{\sqrt{2x+1}}$，则 $g(x)$ 的定义域为(　　)

A. $\left(-\dfrac{1}{2},3\right]$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$　　D. $\left(-\dfrac{1}{2},3\right)$

【答案】A

【难度】易

【考点】抽象与具体函数单调性应用

【解析】$\because -2\leq x\leq 2$ $\therefore \begin{cases} -2\leq x-1\leq 2 \\ 2x+1>0 \end{cases}$，$\therefore -\dfrac{1}{2}<x\leq 3$.

故选 A.

10.已知奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 f （2）$=0$，则不等式 $\dfrac{f(-x)-f(x)}{2x}\geq 0$ 的解集为(　　)

A. $[-2，0)\cup(0，2]$　　B. $[-2，0)\cup[2，+\infty)$

C. $(-\infty，2]\cup(0，2]$　　D. $(-\infty，-2]\cup[2，+\infty)$

【答案】A

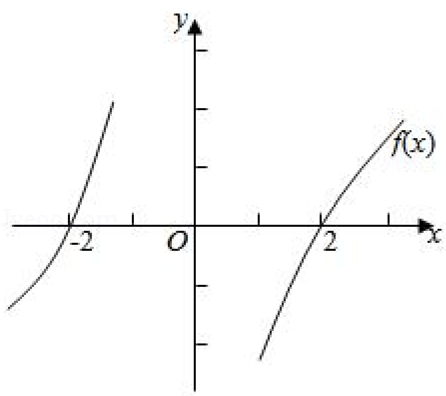
【难度】中

【考点】函数单调性与奇偶性结合，解分式不等式

【解析】$\because$ 奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，又 f （2）$=0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，且 $f(-2)=-f$（2）$=0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象如图，



则不等式 $\dfrac{f(-x)-f(x)}{2x}\geqslant 0$ 等价为 $\dfrac{f(x)}{x}\leqslant 0$，

当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant 0$，此时 $0<x\leqslant 2$.

当 $x<0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，此时 $-2\leqslant x<0$，

即不等式的解集是：$[-2，0)\cup(0，2]$.

故选：A.

11．具有性质：$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$的函数，我们称为满足“倒负”变换的函数，下列函数① $y=x-\dfrac{1}{x}$ ② $y=x+\dfrac{1}{x}$

③ $y=\begin{cases} x \ (0<x<1) \\ 0 \ (x=1) \\ -\dfrac{1}{x} \ (x>1) \end{cases}$ 中满足“倒负”变换的函数是(　　)

A．①②　　B．①③　　C．②　　D．只有①

【答案】B

【难度】中

【考点】新定义函数理解及分段函数求解析式

【解析】对于①：设 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，$\therefore f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}-x=-f(x)$，$\therefore y=x-\dfrac{1}{x}$是满足“倒负”变换的函数

对于②：设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$\because f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{5}{2}$，$-f$（2）$=-\dfrac{5}{2}$，即 $f(\dfrac{1}{2})\neq -f$（2），$\therefore y=x+\dfrac{1}{x}$是不满足“倒负”变换的函数

对于③：设 $f(x)=\begin{cases} x \ (0<x<1) \\ 0 \ (x=1) \\ -\dfrac{1}{x} \ (x>1) \end{cases}$ 则 $-f(x)=\begin{cases} -x \ (0<x<1) \\ 0 \ (x=1) \\ \dfrac{1}{x} \ (x>1) \end{cases}$

$\because 0<x<1$时，$\dfrac{1}{x}>1$，此时 $f(\dfrac{1}{x})=-\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=-x$；

$x=1$时，$\dfrac{1}{x}=1$，此时 $f(\dfrac{1}{x})=0$；

$x>1$时，$0<\dfrac{1}{x}<1$，此时 $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x}$；

$\therefore f(\dfrac{1}{x})=\begin{cases} -x \ (0<x<1) \\ 0 \ (x=1) \\ \dfrac{1}{x} \ (x>1) \end{cases}=-f(x)$，

$\therefore y=\begin{cases} x \ (0<x<1) \\ 0 \ (x=1) \\ -\dfrac{1}{x} \ (x>1) \end{cases}$ 是满足“倒负”变换的函数

故选：B．

12．定义在$[-1，1]$的函数$f(x)$满足下列两个条件：

①任意的$x\in[-1，1]$，都有$f(-x)+f(x)=0$；

②任意的m，$n\in[0，1]$，当$m\neq n$，都有$\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}<0$，

则不等式$f(1-3x)+f(1-x)\leq 0$的解集是(　　)

A．$\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$　　C．$\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)$　　D．$\left[\dfrac{2}{3},1\right]$

【答案】B

【难度】中

【考点】函数单调性与奇偶性结合

【解析】由①知$f(x)$是奇函数，由②知$f(x)$在$[0，1]$上是减函数；

$\therefore f(x)$在$[-1，1]$上是减函数；

$\therefore$由不等式$f(1-3x)+f(1-x)\leq 0\Leftrightarrow f(1-3x)\leqslant f(x-1)$得：

$\begin{cases}-1\leqslant 1-3x\leqslant 1\\-1\leqslant x-1\leqslant 1\\1-3x\geqslant x-1\end{cases}$，解得$0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$；

$\therefore$不等式$f(1-3x)+f(1-x)\leq 0$的解集为$[0,\dfrac{1}{2}]$．

故选：B．

Ps：A 卷选择题答案 1~6：DDDBAC　7~12:BBAABB

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

13．已知$f\left(x\right)=x^2-\left(3-m\right)x+4$为偶函数，则实数$m$的值是_________．

【答案】3

【难度】易

【考点】偶函数应用

【解析】$f\left(x\right)$为二次函数且为偶函数，所以$3-m=0$，$m=3$．

故答案为：3.

14. 已知集合 $A=\{x\mid -2\le x\le 7\}$，$B=\{x\mid m+1<x<2m-1\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 m 的取值范围__________.

【答案】$(-\infty,4]$

【难度】中

【考点】集合关系与运算

【解析】$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$.

分两种情况考虑：

①若 B 不为空集，可得 $m+1\leqslant 2m-1$，解得：$m\geqslant 2$，

$\because B\subseteq A$，$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid m+1<x<2m-1\}$，

$\therefore m+1\geqslant -2$，且 $2m-1\leqslant 7$，解得：$-3\leqslant m\leqslant 4$，

此时 m 的范围为 $2\leqslant m\leqslant 4$；

②若 B 为空集，符合题意，可得 $m+1>2m-1$，解得：$m<2$，

综上，实数 m 的范围为 $m\leqslant 4$.

故答案为：$(-\infty,4]$

15. 已知 $f(x)=\dfrac{ax^3}{x^2+1}+2$ 在区间 $[-m,m]$ 的最大值和最小值的和是______.

【答案】4

【难度】中

【考点】奇偶性与最值

【解析】$g(x)=\dfrac{ax^3}{x^2+1}$ 为奇函数，当 $x\in[-m,m]$ 时，若 $x=n$ 时，$g(n)$ 为最大值，则必当 $x=-n$ 时，$g(-n)$ 必为最小值，$g(n)+g(-n)=0$，$f(x)_{max}+f(x)_{min}=f(n)+f(-n)=g(n)+2+g(-n)+2=4$

故答案为：4.

16. 已知二次函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$，如果存在实数 m，$n(m<n)$，使得 $f(x)$ 的定义域和值域分别是 $[m$，$n]$ 和 $[4m$，$4n]$，则 $m+n=$__________.

【答案】-6

【难度】中

【考点】二次函数定轴动区间问题

【解析】根据题意，二次函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{2}$ 的对称轴为 $x=1$，最大值为 $\dfrac{1}{2}$；

分 3 种情况讨论：

①当 $m<n\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[m，n]$ 上递增，则有 $\begin{cases} f(m)=-\dfrac{1}{2}\times m^2+m=4m \\ f(n)=-\dfrac{1}{2}\times n^2+n=4n \end{cases}$，

解可得 $m=-6$，$n=0$，

此时 $m+n=-6$；

②当 $m<1<n$ 时，$f(x)$ 的最小值为 f（1）$=\dfrac{1}{2}=4n$，解可得 $n=\dfrac{1}{8}$，

与 $m<1<n$ 矛盾，不符合题意；

③当 $1\leqslant m<n$ 时，$f(x)$ 在 $[m，n]$ 上递减，

若 $f(x)$ 的值域分别是 $[4m，4n]$，必有 $4n\leqslant\dfrac{1}{2}$，则有 $n\leqslant\dfrac{1}{8}$

不符合题意；

故 $m+n=-6$；

故答案为：-6．

三、解答题（本大题共 6 小题，17-21 题各 12 分，22 题 10 分，共 70 分）

17. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x-3}-\dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$ 的定义域为集合 A，$C=\{x\,|\,x<a$ 或 $x>a+1\}$．

(1)求 A；

(2)若 $A\cup C=\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围．

【答案】（1）$A=[3，7)$；（2）$[3，6)$．

【难度】易

【考点】具体函数定义域，集合关系

【解析】（1）由 $\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ 7-x>0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x\geqslant 3 \\ x<7 \end{cases}$，解得 $3\leqslant x<7$，即 $A=[3，7)$；

（2）$\because C=\{x\,|\,x<a$ 或 $x>a+1\}$．

$\therefore$ 若 $A\cup C=\mathbf{R}$，则 $\begin{cases} a\geqslant 3 \\ a+1<7 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} a\geqslant 3 \\ a<6 \end{cases}$，解得 $3\leqslant a<6$，即实数 a 的取值范围是 $[3，6)$．

18. 已知函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$，

(1)判断并证明函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上的单调性；

(2)求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[2,3\right]$ 上的最大值和最小值.

【答案】（1）函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调增，证明见解析；（2） $f\left(x\right)_{\max}=f\left(3\right)=\dfrac{10}{3}$， $f\left(x\right)_{\min}=f\left(2\right)=\dfrac{5}{2}$.

【难度】中

【考点】二次函数解析式，最值

【解析】（1）函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调增，证明如下：

任取 x_1，$x_2\in\left(1,+\infty\right)$， $x_1<x_2$， $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\cdot\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$，

由 $x_1-x_2<0$， $x_1x_2>1$， 可得 $f(x_1)<f(x_2)$，

函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调增；

（2）由（1）可得，当 $x\in\left[2,3\right]$ 时， $f\left(x\right)_{\max}=f\left(3\right)=\dfrac{10}{3}$， $f\left(x\right)_{\min}=f\left(2\right)=\dfrac{5}{2}$.

19. 二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq0\right)$满足 $f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=2x$， 且 $f\left(0\right)=1$，

(1)求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

(2)若在区间 $\left[t,t+1\right]$ $\left(t\in\mathbf{R}\right)$ 上的最小值为 1，求 t 的值.

【答案】（1） $f\left(x\right)=x^2-x+1$；（2） t 的值为 -1 或 1

【难度】中

【考点】二次函数解析式，最值

【解析】（1）由 $f\left(0\right)=1\Rightarrow c=1$，由 $f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=2x$，得 $a\left(x+1\right)^2+b\left(x+1\right)-ax^2-bx=2x$，

整理得， $2ax+a+b=2x$， 可得 $\begin{cases}2a=2\\a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，

故 $f\left(x\right)=x^2-x+1$；

（2）由 $f\left(x\right)=x^2-x+1=1$，求得 $x=0$ 或 $x=1$

由题可得 $t+1=0$ 或 $t=1$

故 t 的值为 -1 或 1.

20．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2+2x$

⑴求 $f(-1)$ 的值；

⑵求函数 $f(x)$ 的解析式；

⑶若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,\ a-2]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围．

【答案】（1）$f(-1)=-1$；（2）$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, x>0\\ 0, x=0\\ x^2+2x, x<0\end{cases}$；（3）$(1,\ 3]$

【难度】中

【考点】奇偶性应用，奇偶性与单调性综合

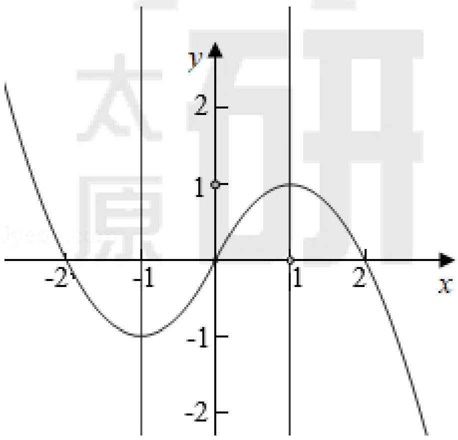
【解析】（1）$f(-1)=-f(1)=-(-1^2+2)=-1$；

（2）设 $x<0$，$-x>0$，则 $f(-x)=-(-x)^2+2(-x)=-x^2-2x$，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，于是 $x<0$ 时 $f(x)=x^2+2x$，

所以 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, x>0\\ 0, x=0\\ x^2+2x, x<0\end{cases}$．

（3）画出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示：



要使 $f(x)$ 在 $[-1,\ a-2]$ 上单调递增，

结合 $f(x)$ 的图象知 $\begin{cases}a-2>-1\\ a-2\leqslant 1\end{cases}$，

所以 $1<a\leqslant 3$，故实数 a 的取值范围是 $(1,\ 3]$．

21．共享单车是城市慢行系统的一种模式创新，对于解决民众出行“最后一公里”的问题特别见效，由于停取方便、租用价格低廉，各色共享单车受到人们的热捧．某自行车厂为共享单车公司生产新样式的单车，已知生产新样式单车的固定成本为 20000 元，每生产一件新样式单车需要增加投入 100 元．根据初步测算，自行车厂的总收益（单位：元）满足分段函数 $h(x)$，其中 $h(x)=\begin{cases}400x-\frac{1}{2}x^2, 0<x\le 400\\ 80000, x>400\end{cases}$ x 是新样式单车的月产量（单位：件），利润＝总收益－总成本．

⑴试将自行车厂的利润 y 元表示为月产量 x 的函数；

⑵当月产量为多少件时自行车厂的利润最大？最大利润是多少？

【答案】（1） $y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+300x-20000, 0<x\leqslant 400, 且x\in \mathrm{N}\\ 60000-100x, x>400, 且x\in \mathrm{N}.\end{cases}$；

（2）当月产量 $x=300$ 件时，自行车厂的利润最大，最大利润为 25000 元.

【难度】中

【考点】二次函数应用题

【解析】（1）依题设，总成本为 $20000+100x$，

则 $y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+300x-20000, 0<x\leqslant 400, 且x\in N\\ 60000-100x, x>400, 且x\in N.\end{cases}$；

（2）当 $0\leqslant x\leqslant 400$ 时， $y=-\frac{1}{2}(x-300)^2+25000$，

则当 $x=300$ 时， $y_{max}=25000$；

当 $x>400$ 时， $y=60000-100x$ 是减函数，

则 $y<60000-100\times 400=20000$，

$\therefore$ 当月产量 $x=300$ 件时，自行车厂的利润最大，最大利润为 25000 元.

22．已知函数 $f(x)$ 定义域为$[-1，1]$，若对于任意的 x， $y\in[-1，1]$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $x>0$ 时，有 $f(x)>0$．

（Ⅰ）证明函数 $f(x)$ 是奇函数；

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 在区间$[-1，1]$上的单调性；

（Ⅲ）设 f（1）$=1$，若 $f(x)<m^2-2m+1$，对所有 $x\in[-1，1]$恒成立，求实数 m 的取值范围．

【答案】（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ） $f(x)$ 是在$[-1，1]$上为单调递增函数；（Ⅲ） $m\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【难度】难

【考点】抽象函数奇偶性与单调性综合，恒成立问题

【解析】（Ⅰ）因为有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，

令 $x=y=0$，得 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，

令 $y=-x$ 可得： $f(0)=f(x)+f(-x)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)$ 是定义在 $f(x)$ $[-1，1]$上的奇函数，

由题意设 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)$

由题意 $x>0$ 时，有 $f(x)>0$， $\therefore f(x_2)>f(x_1)$

$\therefore f(x)$ 是在$[-1，1]$上为单调递增函数；

（Ⅲ）根据（Ⅰ）（Ⅱ）结论可得 $f(x)$ 在$[-1，1]$上为单调递增函数，

所以 $f(x)$ 在$[-1，1]$上的最大值为 f（1）$=1$，

所以要使 $f(x)<m^2-2m+1$，对所有 $x\in[-1，1]$恒成立，

只要 $m^2-2m+1>1$，即 $m^2-2m>0$，

即 $m\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$