2020 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题

一、　选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）当 $x\to 0^+$，下列无穷小量中最高阶的是

（A）$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　　（B）$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$

（C）$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$．　　（D）$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}dt$

【答案】（D）．

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则（）

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$

【答案】（C）．

（3）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，$f(0,0)=0$，$n=\left(f_x^{'},f_y^{'},-1\right)\Big|_{(0,0)}$，非 0 向量 $\alpha\perp n$，则（）

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|n\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　　（B）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|n\times x(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\alpha\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\alpha\times x(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

【答案】（A）．

（4）R 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，r 为实数，则（）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 发散，则 $|r| \geq R$ （B）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 收敛，则 $|r| \leq R$

（C）$|r| \geq R$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 发散 （D）$|r| \leq R$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 收敛

【答案】（A）.

（5）若矩阵 A 由初等列变换为矩阵 B，则（）

（A）存在矩阵 P，使 $PA=B$； （B）存在矩阵 P，使 $BP=A$；

（C）存在矩阵 P，使 $PB=A$； （D）方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解；

【答案】（B）.

（6）已知 $l_1: \frac{x-a_2}{a_1}=\frac{y-b_2}{b_1}=\frac{z-c_2}{c_1}$，$l_2: \frac{x-a_3}{a_3}=\frac{y-b_3}{b_2}=\frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点，令 $\alpha_i=\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$，$i=1,2,3$，则（）

（A）α_1 可由 α_2，α_3 线性表示 （B）α_2 可由 α_1，α_3 线性表示

（C）α_3 可由 α_1，α_2 线性表示 （D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

【答案】（C）.

（7）$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 恰好发生一个的概率为（ ）

（A）$\frac{3}{4}$ （B）$\frac{2}{3}$ （C）$\frac{1}{2}$ （D）$\frac{5}{12}$

【答案】（D）.

（8）设为 $x_1,x_2,\ldots,x_{100}$ 来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{x=0\}=P\{x=1\}=\frac{1}{2}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函

数，则由中心极限定理可知，$P\{\sum_{i=1}^{100} x \le 55\}$ 的近似值为（ ）

（A）$1-\Phi(1)$ （B）$\Phi(1)$ （C）$1-\Phi(0.2)$ （D）$\Phi(0.2)$

【答案】（B）.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$ ____________.

【答案】-1

（10）设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ____________.

【答案】$-\sqrt{2}$

（11）设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0\ (a>0)$，且 $f(0)=m$，$f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx=$ ____________.

【答案】$am+n$

（12）设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{xt^2}dt$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$ ____________.

【答案】4e

（13）行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$ ____________.

【答案】a^4-4a^2.

（14）已知随机变量 X 服从区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$ ____________.

【答案】$\dfrac{2}{\pi}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

（15）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

【详解】$\begin{cases} f_x'=3x^2-y=0 \\ f_y'=24y^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$

又 $\begin{cases} f_{xx}''=6x \\ f_{xy}''=-1 \\ f_{yy}''=48y \end{cases}$ 当 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 时 $\begin{cases} A=0 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$，.

$AC-B^2$=-1<0，不为极值点

当 $\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$ 时 $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=4 \end{cases}$，$\begin{cases} AC-B^2=3>0 \\ A=1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$，为极小值点

极小值为 $f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$

（16）（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

【详解】补曲线 $L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针方向

$$I-\int_{L_1} Pdx+Qdy=\iint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4x^2+y^2-(x+y)8x}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)-2y(4x-y)}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$I=\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(4x-y)dx+(x+y)dy$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_1}[1-(-1)]dxdy$$
$$=\pi$$

（17）（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$.证明:当$|x|<1$时幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛并求其和函数.

【详解】（I）$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1$

则$R=\frac{1}{\rho}=1$，所以当$|x|<1$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛.

（II）令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+a_1$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_nx^n+1=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+1$$
$$=xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)+1$$

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}[2+S(x)]$$
$$\int\frac{dS(x)}{2+S(x)}=\int\frac{dx}{2(1-x)}$$
$$\ln|2+S(x)|=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\ln C_1$$
$$2+S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}$$

因为$S(0)=0$，所以和函数：$S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,\quad(-1<x<1)$.

（18）（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le x^2+y^2\le 4)$ 下侧，$f(x)$ 为连续函数．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]dydz+\left[yf(xy)+2y+x\right]dzdx+\left[zf(xy)+z\right]dxdy$．

【详解】将曲面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ 向 xoy 面投影得 D_{xy}

D_{xy} 为 $1\le x^2+y^2\le 4$，又 $Z_x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},Z_y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$I=-\iint\limits_{D_{xy}}\{[xf(xy)+2x-y](-Z_x')+[yf(xy)+2y+x](-Z_y')+[\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}]\}dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{\frac{1}{x^2+y^2}[-xf(xy)-2x^2+xy-y^2f(xy)-2y^2-xy]+\sqrt{x^2+y^2}[f(xy)+1]\}dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}-\sqrt{x^2+y^2}f(xy)-2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r\cdot rdr$$

$$=\frac{14}{3}\pi$$

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数．$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$．

证:(1)存在 $\xi\in(0,2)$ 使 $|f'(\xi)|\ge M$

(2)若对任意 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$，则 $M=0$．

【详解】(Ⅰ) 证明: (1) $M=0$ 时, 则 $f(x)=0$, 显然成立.

$M>0$ 时, 不妨设在点 $c(\in(0,2))$ 处取得最大值 $|f(c)|=M$.

由拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi_1\in(0,c)$, 使得 $|f'(\xi_1)|=\left|\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}\right|=\dfrac{M}{c}$；

存在 $\xi_2\in(c,2)$, 使得 $|f'(\xi_2)|=\left|\dfrac{f(2)-f(c)}{2-c}\right|=\dfrac{M}{2-c}$；

所以 $(\frac{M}{c}-M)(\frac{M}{2-c}-M)=-M^2\frac{(c-1)^2}{c(2-c)}\quad 0$，即 M 介于 $\frac{M}{c}$ 与 $\frac{M}{2-c}$ 之间，从而有

$$|f'(\xi_1)|\quad M \text{ 或 } f'(\xi_2)|\quad M,$$

结论得证.

（II）当 $c\neq 1$ 时，采用反证法，假设 $M>0$.

则 $|f'(\xi_1)|>M$ 或 $|f'(\xi_2)|>M$，与已知矛盾，假设不成立.

当 $c=1$ 时，此时 $|f(1)|=M$，易知 $f'(1)=0$.

设 $G(x)=f(x)-Mx$，$0\quad x\quad 1$；则有 $G'(x)=f'(x)-M\quad 0$，从而 $G(x)$ 单调递减.

又 $G(0)=G(1)=0$，从而 $G(x)=0$，即 $f(x)=Mx$，$0\quad x\quad 1$.

因此 $f_-'(1)=M$，从而 $M=0$.

综上所述，最终 $M=0$

（20）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变化 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4x_1x_2+6y_2^2$，其中 $a\geq b$.

(1) 求 a,b 的值

(2) 求正交变换矩阵 Q

【详解】（I）设 $f=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$，经正交变换 $x=Qy$，

$f=y^TQ^TAQy=y^TBy$，其中 $B=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$；

可知 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=B$，即 A 相似于 B，则

$\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\ |A|=|B|\end{cases}$ 解得 $a=4,b=1$；

（II）设 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda,P_2^{-1}BP_2=\Lambda$，则 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A\left(P_1P_2^{-1}\right)=B$，因此 $Q=P_1P_2^{-1}$；

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$，解出 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$；

$(0E-A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\xi_1 = (2,1)^T$；

$(5E-A) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\xi_2 = (1,-2)^T$；$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$；

$(0E-B) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\eta_1 = (1,-2)^T$；

$(5E-B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\eta_2 = (2,1)^T$；$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$；

综上所述，$Q = P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

（21）（本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵，$P = (\alpha, A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(1)证明 P 为可逆矩阵.

(2)若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【详解】（I）α **不是特征向量且** $\alpha \neq 0$，**则** $A\alpha \neq k\alpha$，**即** $A\alpha, \alpha$ **线性无关，**

所以 $r(P) = 2$，**矩阵** P **可逆.**

（II）设 $P^{-1}AP = B$，则 $AP = PB$，即

$$A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha)$$

$$= (\alpha, A\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 $P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 A B，

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$，因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 B 可以相似对角化，则 A 可以相似对角化.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$。

（1） 求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示；

（2） 证明随机变量 Y 服从标准正态分布。

【详解】（I）

$$F(x,y)=P\{X_1\le x,Y\le y\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X_1\le x,X_2\le y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\le x,X_1\le y\}$$
$$=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(x)\left[1+\Phi(y)\right],x\le y\\ \frac{1}{2}\Phi(y)\left[1+\Phi(x)\right],x>y\end{cases}$$

(2) $F_Y(y)=F_{X_1,Y}(+\infty,y)=\frac{1}{2}\Phi(y)\left[1+\Phi(+\infty)\right]=\Phi(y)$，

故 Y 服从标准正态分布.

（23）（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-(\frac{t}{\theta})^m},t\ge 0\\ 0,其它\end{cases}$$，其中 θ，m 为参数且大于零。

（1）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

（2）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\dots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 θ。

【详解】（I） $P\{T>t\}=1-P\{T\le t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$，

$$P\{T>t+s\mid T>s\}=\frac{P\{T>t+s,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m};$$

（II）求得密度函数 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$，

故可构造似然函数为 $L(\theta)=m^n\left(t_1t_2\quad t_n\right)^{m-1}\theta^{-mn}e^{-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$，

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m+(m-1)\ln\left(t_1t_2\quad t_n\right)-mn\ln\theta-\dfrac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$

求导可得 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{mn}{\theta}+m\dfrac{1}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0$，

解出 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$.