

2019 ~ 2020 学年第一学期高二年级期末考试

数学试卷 (文科)

一、选择题 (本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将其字母标号填入下表相应位置)

1. 命题 “若 $x=1$, 则 $x^2=1$ ” 的逆否命题是 ()

- A. 若 $x^2=1$ 则 $x=1$, B. 若 $x \neq 1$, 则 $x^2 \neq 1$
C. 若 $x=1$, 则 $x^2 \neq 1$ D. 若 $x^2 \neq 1$, 则 $x \neq 1$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的焦距为 ()

- A. 9 B. $2\sqrt{14}$
C. $2\sqrt{5}$ D. 4

3. 已知函数 $f(x) = x + \sin x$ 则 $f'(0)$ ()

- A. 2 B. 0
C. 1 D. -1

4. 已知 $p: a > b, q: a > c$ 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 ()

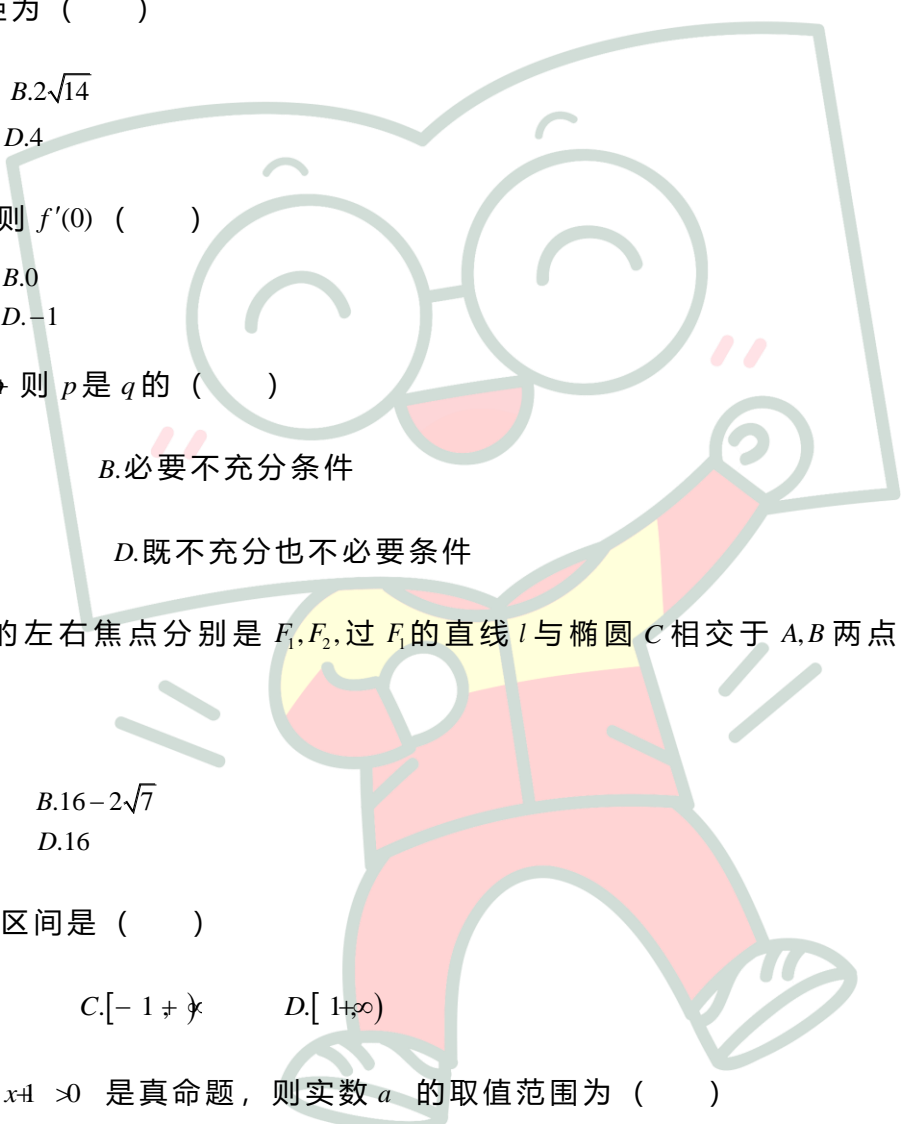
- A. $8 + 2\sqrt{7}$ B. $16 - 2\sqrt{7}$
C. 8 D. 16

6. 函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 的单调增区间是 ()

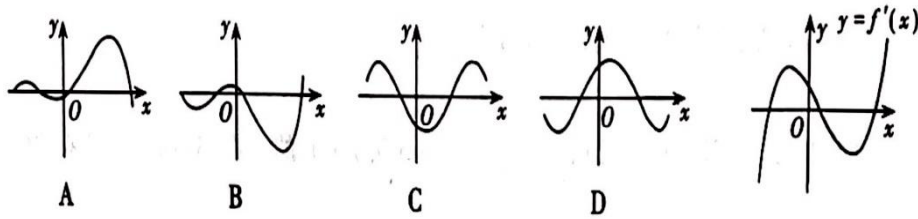
- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

7. 已知命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + ax + 1 > 0$ ” 是真命题, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, \infty)$ C. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ D. $(-2, 2)$



8. 函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图像如图所示, 则函数的图像可能是 ()



9. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ C. $y = \pm \sqrt{2}x$ D. $y = \pm \sqrt{3}x$

10. 若函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ 在 $(0,1)$ 内有极小值, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-1,1)$ B. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ C. $(0, \frac{1}{3})$ D. $(0, \frac{1}{2})$

11. 已知直线 l 与抛物线 $x^2 = 4y$ 交于不同的两点 A, B , 若线段 AB 的中点坐标为 $(1,2)$, 则直线 l 的方程为 ()

- A. $x - 2y + 3 = 0$ B. $x - y + 1 = 0$ C. $x - y + 1 = 0$ D. $2x - y = 0$

12. 已知偶函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且 $2f(x) + x f'(x) < 8, f(1) = 1$, 则不等式 $f(x) < 4 - \frac{3}{x^2}$ 的解集是 ()

- A. $(-2,2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

二. 填空题 (本题共 4 个小题, 每个小题 4 分, 共 16 分)

13. 命题 " $\forall x \in \mathbb{R} \sin x \leq 1$ " 的否定是 _____.

14. 曲线 $f(x) = x \ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____.

15. 已知点 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点, 点 P 是双曲线 C 右支上一点, $\triangle PF_1F_2$ 内心为 I , 若 $S_{\triangle IPF_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{\triangle IF_1F_2} + S_{\triangle IPF_2}$, 则双曲线 C 的离心率为 _____.

16. 已知 A, B 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的两个不同的动点, 点 $P(1,2)$, 若直线 PA 和 PB 的倾斜角互补, 则线段 AB 的中点的轨迹方程为 _____.

三. 解答题 (本题共 5 个小题, 共 48 分)

17. (本小题 8 分)

已知 $p: y = a$ 是增函数; $q: \text{方程 } \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 0)$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆, 若 $p \wedge (\neg q)$ 是真命题, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题 10 分)

求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ 在 $[-2, 3]$ 上的最大值和最小值

19. (本小题 10 分)

已知抛物线 C 的顶点在坐标原点 O , 其对称轴为 x 轴, $P(1, 2)$ 在抛物线 C 上.

- (1) 求抛物线 C 的标准方程及准线方程;
- (2) 过抛物线 C 焦点的直线 l 与该抛物线交于 A, B 两个不同点, 若点 $M(3, 2)$ 是线段 AB 的中点, 求 $\triangle AOB$ 的面积

20. (本小题 10 分) 说明: 请考生在 (A), (B) 两个小题中任选一题作答.

(A) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + \ln x (a \in \mathbb{R})$.

- (1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

(B) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + \ln x (a \in \mathbb{R})$.

- (1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x) < -\frac{1}{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21 (本小题 10 分) 说明: 请考生在 (A) (B) 两个小题中任选一题作答

(A) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, A, B 分别为其右顶点和上顶点, $\triangle OAB$ 的面积为

$\sqrt{2}$ (O 是坐标原点)

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若点 $E(\sqrt{3}, 0)$, M, N 是椭圆 C 上两动点 (M, N 非顶点), 且 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = -1$, 试判断直线 MN 是否过定点? 若过定点, 求出该定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

(B) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $P\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若点 $E(\sqrt{3}, 0)$, M, N 是椭圆 C 上两动点 (M, N 非顶点), 且 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = -1$, 试判断直线 MN 是否过定点? 若过定点, 求出该定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

