2019～2020 学年第一学期高二年级期末考试

数学试卷（文科）解析

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将其字母标号填入下表相应位置）

1.命题“若 $x=1$, 则 $x^2=1$”的逆否命题是（　　）

$A.$ 若 $x^2=1$则 $x=1$,　　　　$B.$ 若 $x\neq1$, 则 $x^2\neq1$

$C.$ 若 $x=1$, 则 $x^2\neq1$　　　　$D.$ 若 $x^2\neq1$, 则 $x\neq1$

[答案] D

[解析] 命题“若 $x^2=1$, 则 $x=1$ 或 $x=-1$”的逆否命题是“若 $x^2\neq1$, 则 $x\neq1$”．

2.双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$的焦距为（　　）

$A.9$　　　　$B.2\sqrt{14}$

$C.2\sqrt{5}$　　　　$D.4$

[答案] B

[解析] 根据 $c^2=a^2+b^2$得 $c=\sqrt{14}$，故焦距为 $2\sqrt{14}$

3.已知函数 $f(x)=x+\sin x$则 $f'(0)$（　　）

$A.2$　　　　$B.0$

$C.1$　　　　$D.-1$

[答案] A

[解析] 函数 $f(x)=x+\sin x$ 则 $f'(x)=1+\cos x$, 则 $f'(0)=1+\cos 0=1+1=2$

4.已知 $p: a>b$, $q: a+c>b+c$ 则 p是 q的（　　）

$A.$充分不必要条件　　　　$B.$必要不充分条件

$C.$充要条件　　　　$D.$既不充分也不必要条件

[答案] C

[解析]充分性：$\because a>b\therefore a+c>b+$

必要性：$\because a+c>b+$两边同时减 $c\therefore a>b$

5.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左右焦点分别是 F_1,F_2，过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，则 ΔABF_2 的周长为（　　）

$A.8+2\sqrt{7}$　　　　$B.16-2\sqrt{7}$

$C.8$　　　　$D.16$

[答案] D

[解析] 椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\therefore a=4.$ ΔABF_2 的周长为：

$$AB+AF_2+BF_2=AF_1+AF_2+BF_1+BF_2=4a=16$$

6.函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}$ 的单调增区间是（　　）

$A.(-\infty,-1]$　　$B.(-\infty,1]$　　$C.[-1,+\infty)$　　$D.[1,+\infty)$

【答案】 B

【解析】 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}\geq 0$，解得 $x\leq 1$

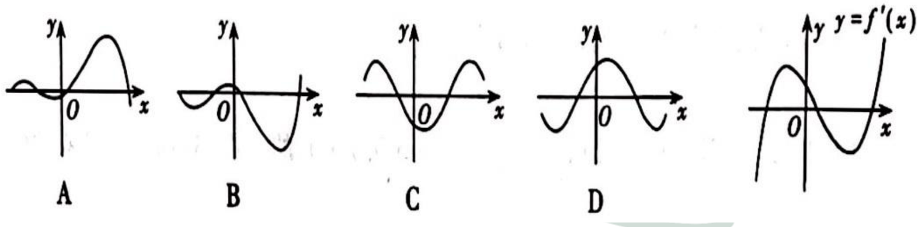
7.已知命题“$\forall x\in R, x^2+ax+1>0$”是真命题，则实数 a 的取值范围为（　　）

$A.(-\infty,-2)$　　$B.(2,+\infty)$　　$C.(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　$D.(-2,2)$

【答案】 D

【解析】 $\Delta=a^2-4<0$，解得 $a\in(-2,2)$

8. 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图所示，则函数的图像可能是（　　）



【答案】 D

【解析】由导函数有三个零点分别记作 x_1、x_2、x_3 ，$x<x_1$时，$f'(x)<0$则 $f(x)$单减，同理 $x_1<x<x_2$ 时 $f(x)$单增， $x_2<x<x_3$时， $f(x)$单减， $x>x_3$时 $f(x)$单增，且极大值点大于零

9. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程是（　　）

$A.\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　　$B.\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　　$C.\ y=\pm\sqrt{2}x$　　　$D.\ y=\pm\sqrt{3}x$

【答案】 B

【解析】 椭圆 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 得 $b^2=\frac{1}{3}a^2$ ，双曲线渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

10. 若函数 $f(x)=x^3-3ax^2+a$ 在 $(0,1)$ 内有极小值，则实数的取值范围为（　　）

$A.(-1,1)$　　　$B.\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　　$C.\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　　$D.\left(0,\frac{1}{2}\right)$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x)=x^3-3ax^2+a$ 在 $(0,1)$ 内有极小值,则导函数 $f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$ 必在 $(0,1)$有两个不等实根，并且较大根满足 $2a\in(0,1)$ ，解得 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

11.已知直线 l 与抛物线 $x^2=4y$ 交于不同的两点 A, B，若线段 AB 的中点坐标为 $(1,2)$，则直线 l 的方程为（　　）

$A.x-2y+3=0$　　　B.$x-y+1=0$　　　C $x-4y+7=0$　　　D.$2x-y=0$

【答案】A

【解析】 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 代入抛物线方程作差得 ${x_1}^2-{x_2}^2=4(y_1-y_2)$ 得 $x_1+x_2=\frac{4(y_1-y_2)}{x_1-x_2}$ 即 $2=4k_{AB}$ 得 $k_{AB}=\frac{1}{2}$，所以直线 l 的方程为 $x-2y+3=0$，故选 A

12.已知偶函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，且 $2f(x)+xf'(x)<8$，$f(1)=1$ 则不等式 $f(x)<4-\frac{3}{x^2}$ 的解集是（　）

$A.(-2,2)$　　　$B.(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　　C $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　　D $(-1,1)$

【答案】C

【解析】令 $g(x)=x^2f(x)-4x^2$，则 $g'(x)=x\left[2f(x)+xf'(x)-8\right]$，当 $x>0,g'(x)<0$；当 $x<0,g'(x)>0$；

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $g(1)=f(1)-4=-$

由题 $f(x)<4-\dfrac{3}{x^2}$ 得 $x^2f(x)-4x^2<-3$ 即 $g(x)<g(1)$ 得 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

二．填空题（本题共 4 个小题，每个小题 4 分，共 16 分）

13.命题“ $\forall x\in R,\sin x\le$ ”的否定是_________.

【答案】 $\exists x_0\in R,\sin x_0>1$

【解析】略

14.曲线 $f(x)=x\ln$ 在点 $(1,\ f(1)$ 处的切线方程为_________.

【答案】 $y=x-1$

【解析】点：$(1,0)$； $f'(x)=\ln x+1$， $f'(1)=1$；由点斜式可写出该切线方程为 $y=x-1$

15.已知点 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，点 P 是双曲线 C 右支上一点， ΔPF_1F_2 内心为 I，若 $S_{\Delta IPF_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_{\Delta IF_1F_2}+S_{\Delta IPF_2}$，则双曲线 C 的离心率为_________.

【答案】 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】设 ΔPF_1F_2 内切圆得半径为 r，由题可得 $S_{\Delta IPF_1}-S_{\Delta IPF_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_{\Delta IF_1F_2}$ 即 $\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot r$ 得 $2a=\sqrt{3}c$ 得 $e=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

16.已知 A,B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的两个不同的动点，点 $P(1,2)$，若直线 PA 和 PB 的倾斜角互补，则线段 AB 的中点的轨迹方程为_________.

【答案】 $y=-2(x>1)$

【解析】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $k_{PA}=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}(x_1\ne1)$， $k_{PB}=\dfrac{y_2-2}{x_2-1}(x_2\ne1)$，由题可知 $k_{PA}=-k_{PB}$，又因为 $y_1^2=4x_1,y_2^2=4x_2$ 所以 $\dfrac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=-\dfrac{y_2-2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$ 得 $y_1+2=-(y_2+2)$ 即 $y_1+y_2=-4$

设 AB 得中点为 (x,y)，则

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=-2,\quad x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{8}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{8}=\frac{16-2y_1y_2}{8}$$

由题可知 $y_1<0, y_2<0$ 所以 $(-y_1)+(-y_2)=4>2\sqrt{y_1 y_2}$ 即 $y_1 y_2<4$ 所以 $x>1$

线段 AB 的中点的轨迹方程为 $y=-2(x>1)$

三．解答题（本题共 5 个小题，共 48 分）

17. （本小题 8 分）

已知 p: $y=a$ 是增函数；q:方程 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，若 $p\wedge(\neg q)$ 是真命题，求实数 a 的取值范围。

【答案】 $(0,1]$

【解析】若 $p\wedge(\neg q)$ 是真命题，则 p 为真命题，有：$a>0$；$\neg q$ 为真命题，有 $0<a^2\le 1$，即 $0<a\le 1$；两者取交集可得 $a\in(0,1]$

18.（本小题 10 分）

求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-1$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值和最小值

【答案】 $f(x)_{max}=\frac{1}{6}$ ， $f(x)_{min}=-\frac{13}{3}$

【解析】 $f'(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

令 $f'(x)=(x-2)(x+1)=0$，则 $x=2$，$x=1$

$f(-2)=-\frac{5}{3}$， $f(-1)=\frac{1}{6}$， $f(2)=-\frac{13}{3}$， $f(3)=-\frac{5}{2}$

所以 $f(x)_{max}=\frac{1}{6}$ ， $f(x)_{min}=-\frac{13}{3}$

19.（本小题 10 分）

已知抛物线 C 的顶点在坐标原点 O，其对称轴为 x 轴，$P(1,2)$ 在抛物线 C 上。

（1） 求抛物线 C 的标准方程及准线方程；

（2） 过抛物线C焦点的直线l与该抛物线交于A,B两个不同点，若点$M(3,2)$是线段AB的中点，求$S_{\Delta OAB}$的面积

【答案】（1） $y^2=4x$ ， $x=-1$ （2） $S_{\Delta OAB}=2\sqrt{2}$

【解析】(1)设抛物线的标准方程为 $y^2=2px$

因为 $P(1,2)$抛物线 C上，所以 $4=2p$， $2=p$；

所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$ ，准线方程 $x=-1$

（2）设点 A, B坐标分别为 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=x_1+x_2+2=8$

因为$k_{MF}=1$，所以直线AB的方程为$y=x-1$

所以O点到直线AB的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{2}$

20.（本小题 10 分）说明：请考生在（A），（B）两个小题中任选一题作答.

（A）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+\ln x(a\in R)$.

（1）当 $a=0$时，求 $f(x)$的单调区间；

（2）若 $f(x)$在 $(1,+\infty)$上单调递增，求实数 a的取值范围.

【答案】（1） $\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,1]$，单调减区间为（$1,+\infty$）

（2） $(-\infty,-1]$

【解析】（1）当 $a=0$时， $f(x)=-x+\ln x, x>0, \therefore f'(x)=\frac{1-x}{x}$,

令$f'(x)>0$,则$0<x<1$;令$f'(x)<0$,则$x>1$;

$\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,1]$，单调减区间为（$1,+\infty$）

（2）由题意得 $f'(x)=-ax+(a-1)+\frac{1}{x}=\frac{(ax+1)(x-1)}{x}, x>0$

$\because f(x)$在 $(1,+\infty)$上单调递增， $\therefore f'(x)\geq 0$ 在 $(1,+\infty)$上恒成立，

$\therefore a \le -\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore a \le -1$ 实数 a 的取值范围 $(-\infty,-1]$.

(B)已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+\ln x\ (a\in$

（1）当 $a=0$时，求 $f(x)$的单调区间；

（2）若 $f(x)<-1$ 在上 $(0,1)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,1]$，单调减区间为（$1,+\infty$）

（2）$(-\infty,0)$.

【解析】（1）当 $a=0$时，$f(x)=-x+\ln x, x>0, \therefore f'(x)=\frac{1-x}{x}$，

令$f'(x)>0$，则$0<x<1$；令$f'(x)<0$，则$x>1$；

$\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,1]$，单调减区间为（$1,+\infty$）

(2)由题意得 $f'(x)=ax+(a-1)+\frac{1}{x}=\frac{(ax+1)(x-1)}{x}$, x

①当 $a\ge 0$时；$\because f(1)=\frac{1}{2}a-1\ge -1$，$a\ge 0$不符合题意

②当 $a<0$时，i)当 $-\frac{1}{a}\ge 1$时，即当 $-1\le a<0$时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增

$\therefore f(x)<f(1)=\frac{1}{2}a-1<-1, \therefore -1\le a<0$符合题意

ii) 当 $0<-\frac{1}{a}<1$时，即当 $a<-1$时，令 $f'(x)>0$，则 $0<x<-\frac{1}{a}$；

令 $f'(x)<0$，则 $-\frac{1}{a}<x<1$，$f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{a},1)$ 上单调递减

$\therefore f(-\frac{1}{a})=\frac{1}{2a}-1-\ln(-a)<\frac{1}{2a}-1<-1, \therefore a<-1$符合题意

综上所述，实数的取值范围为 $(-\infty,0)$

21（本小题 10 分）说明：请考生在（A）（B）两个小题中任选一题作答

(A) 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A,B$分别为其右顶点和上顶点，$\Delta OAB$的面积为 $\sqrt{2}$（O是坐标原点）

(1)　求椭圆 C 的方程

(2)　若点 $E(\sqrt{3},0)$，M,N 是椭圆 C 上两动点（M,N 非顶点），且 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=-1$，试判断直线 MN 是否过定点？若过定点，求出该定点的坐标；若不过定点，请说明理由。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ (2) 直线过定点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$

【解析】(1) 由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}ab=\sqrt{2}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

(2) 当直线 MN 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2(m^2-2)=0$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}\\ x_1x_2=\frac{2(m^2-2)}{1+2k^2}\end{cases}$，

因为 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=(x_1-\sqrt{3})(x_2-\sqrt{3})+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+(km-\sqrt{3})(x_1+x_2)+m^2+3=-1$

所以 $4k^2+4\sqrt{3}km+3m^2=0$，所以 $m=-\frac{2\sqrt{3}}{3}k$，此时 $\Delta=16k^2m^2-8(1+2k^2)(m^2-2)>0$

所以直线 MN 的方程为 $y=k(x-\frac{2\sqrt{3}}{3})$，过定点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$

当直线 MN 的斜率不存在时，设 $M(x_1,y_1)$，则 $N(-x_1,-y_1)$，

因为 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=(x_1-\sqrt{3})(-x_1-\sqrt{3})-y_1^2=3-x_1^2-y_1^2=$

所以 $y_1=0,x_1=\pm2$，$M(\pm2,0)$ 舍去

综上可知，直线过定点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$.

(B) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$P\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若点 $E\left(\sqrt{3},0\right)$，M、N 是椭圆 C 上两动点（M、N 非顶点），且 $\mathrm{EM}\cdot\mathrm{EN}=-1$，试判断直线 MN 是否过定点？若过定点，求出该定点的坐标；若不过定点，请说明理由。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）直线 MN 过定点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$

【解析】（1）$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{\frac{3}{2}}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2=4\\ b^2=2\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）①当直线 MN 的斜率不存在时，设 $M(x_1,y_1)$，则 $N(x_1,-y_1)$

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=(x_1-\sqrt{3})^2-y_1^2=x_1^2-2\sqrt{3}x_1+3-y_1^2=-1$

$3x_1^2-4\sqrt{3}x_1+4=0 \quad \Rightarrow MN: x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

②当直线 MN 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases} \Rightarrow (1+2k^2)x^2+4kmx+2(m^2-2)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}\\ x_1x_2=\frac{2(m^2-2)}{1+2k^2}\end{cases}$，

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=(x_1-\sqrt{3})(x_2-\sqrt{3})+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+(km-\sqrt{3})(x_1+x_2)+m^2+3=-1$

$4k^2+4\sqrt{3}km+3m^2=0 \quad \Rightarrow m=-\frac{2\sqrt{3}}{3}k$，此时 $\Delta=16k^2m^2-8(1+2k^2)(m^2-2)>$

所以直线 MN 的方程为 $y=k(x-\frac{2\sqrt{3}}{3})$，过定点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$

综上所述，直线 MN 过定点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$