大学港市





## 2020年全国硕士研究生入学统一考试

# 数学(一)试题

- 选择题: 1~8 小题,每小题 4分,共 32分.下列每题给出的四个选项中,只有 符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.
- (1) 当 $x \rightarrow 0^+$ ,下列无穷小量中最高阶的是

(A) 
$$\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$$

(B) 
$$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$$

(C) 
$$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$$
.

(D) 
$$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$$

#### 【答案】(D).

- (2) 设函数 f(x) 在区间 (-1,1) 有定义,且  $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ,则()
  - (A) 当  $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$  时, f(x) 在 x = 0 处可导
- (B) 当  $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$  时, f(x) 在 x = 0 处可导
  - (C) f(x)在x = 0处可导时, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$
  - (D) f(x)在x = 0处可导时,  $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$

- 【答案】 (C).
  (3) f(x,y)在(0,0)可微,f(0,0)=0, $\vec{n}=(f_x',f_y',-1)|_{(0,0)}$ ,非0向量 $\alpha \perp \vec{n}$ ,则()

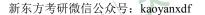
  - (A)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))\right|}{\sqrt{x^2+v^2}}$ 存在 (B)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\vec{n}\times x(x,y,f(x,y))\right|}{\sqrt{x^2+v^2}}$ 存在
- (C)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\alpha \cdot (x,y,f(x,y))\right|}{\sqrt{x^2+v^2}}$ 存在 (D)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\alpha \times x(x,y,f(x,y))\right|}{\sqrt{x^2+v^2}}$ 存在

#### 【答案】(A).



新东方网考研频道











- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  发散,则 $|r| \ge R$
- (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  收敛,则 $|r| \leq R$

(C)  $|r| \ge R$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  发散

(D)  $|r| \le R$ ,则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  收敛

#### 【答案】 (A).

- (5) 若矩阵A由初等列变换为矩阵B,则()
  - (A) 存在矩阵P, 使PA = B;
- (B) 存在矩阵 P, 使 BP = A;
- (C) 存在矩阵 P, 使 PB = A;
- (D) 方程组 AX = 0 与 BX = 0 同解;

#### 【答案】(B).

$$l_{1}: \frac{x-a_{2}}{a_{1}} = \frac{y-b_{2}}{b_{1}} = \frac{z-c_{2}}{c_{1}}$$
相交于一点,令 $\alpha_{i} = \begin{pmatrix} a_{i} \\ b_{i} \\ c_{i} \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,则()

- (A)  $\alpha_1$  可由 $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ 线性表示
- (B)  $\alpha_2$ 可由 $\alpha_1$ , $\alpha_3$ 线性表示
- (C)  $\alpha_3$ 可由 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ 线性表示
- (D)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关

#### 【答案】(C).

- (7)  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ , P(AB) = 0,  $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$ , 则 A, B, C 恰好发生一个的概率为(
- (A)  $\frac{3}{4}$
- (C)  $\frac{1}{2}$

#### 【答案】 (D).

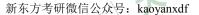
(8) 设为 $x_1, x_2, ..., x_{100}$ 来自总体X的简单随机样本,其中 $P\{x=0\} = P\{x=1\} = \frac{1}{2}$ , $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,

则由中心极限定理可知, $P\{\sum_{i=1}^{100} x \le 55\}$  的近似值为( )

- (A)  $1 \Phi(1)$
- (B)  $\Phi(1)$
- (C)  $1-\Phi(0.2)$  (D)  $\Phi(0.2)$

#### 【答案】(B)

新东方网考研频道







二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 
$$\lim_{x\to 0} \left[ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{1cm}}$$

#### 【答案】-1

(10) 设 
$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}, \quad ||\frac{d^2 y}{dx^2}|_{t=1} = \underline{\hspace{1cm}} .$$

### 【答案】 $-\sqrt{2}$

(11) 设函数 f(x)满足 f''(x)+af'(x)+f(x)=0 (a>0),且 f(0)=m, f'(0)=n,则

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\qquad}.$$

#### 【答案am+n

(12) 设函数 
$$f(x,y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$$
 ,则  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,1)} = \underline{\qquad}$ 

#### 【答案】 4e

(13) 行列式 
$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\qquad}$$

#### 【答案】 $a^4-4a^2$ .

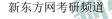
(14) 已知随机变量 X 服从区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布,  $Y = \sin X$  ,则  $Cov(X,Y) = \underline{\qquad}$  .

# 【答案】 $\frac{2}{\pi}$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(15) (本题满分10分)

求函数  $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - xy$  的极值.









【详解】 
$$f_x = 3x^2 - y = 0$$
   
  $f_y = 24y^2 - x = 0$  ⇒  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$    
  $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}$ 

 $AC - B^2 = -1 < 0$ ,不为极值点

当 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}$$
 时  $\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 4 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} AC - B^2 = 3 > 0 \\ A = 1 > 0 \end{cases}$  与极小值点

极小值为 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$ 

(16) (本题满分10分)

(本题满分 10 分)   
计算 
$$I = \int_{L} \frac{4x - y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{4x^2 + y^2} dy$$
,其中  $L$  为  $x^2 + y^2 = 2$ ,方向为逆时针方向.  
解】补曲线  $L_1: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ ,逆时针方向
$$I = \int P dx + Q dy = \int \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

【详解】补曲线  $L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2$ ,逆时针方向

$$I - \int_{L_{1}} P dx + Q dy = \int_{\Sigma - \Sigma_{1}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

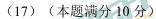
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4x^{2} + y^{2} - (x + y)8x}{(4x^{2} + y^{2})^{2}} = \frac{y^{2} - 8xy - 4x^{2}}{(4x^{2} + y^{2})^{2}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(4x^{2} + y^{2}) - 2y(4x - y)}{(4x^{2} + y^{2})^{2}} = \frac{y^{2} - 8xy - 4x^{2}}{(4x^{2} + y^{2})^{2}},$$

$$I = \int_{L_{1}} \frac{4x - y}{4x^{2} + y^{2}} dx + \frac{x + y}{4x^{2} + y^{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{2}} \int_{L_{1}} (4x - y) dx + (x + y) dy$$

 $= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_1} [1 - (-1)] dx dy$  $= \pi$ 



STIL



方考研微信公众号: kaoyanxdf





设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ , $(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$ .证明:当|x|<1时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛并求其和函数.

【详解】(I)  $\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n+1} = 1$ 

则  $R = \frac{1}{\rho} = 1$ ,所以当 |x| < 1时,幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  收敛.

$$(II) \diamondsuit S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n ,$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + a_1$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n+\frac{1}{2}) a_n x^n + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1$$
$$= xS'(x) + \frac{1}{2} S(x) + 1$$

$$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}[2+S(x)]$$
$$\int \frac{dS(x)}{2+S(x)} = \int \frac{dx}{2(1-x)}$$

$$\ln |2 + S(x)| = -\frac{1}{2} \ln |1 - x| + \ln C_1$$

$$2 + S(x) = \frac{C}{\sqrt{1 - x}}$$

因为S(0) = 0,所以和函数:  $S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2$ , (-1 < x < 1).

(18) (本题满分10分)

设  $\Sigma$  为 曲 面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (1 \le x^2 + y^2 \le 4)$  下 侧 , f(x) 为 连 续 函 数 . 计 算  $I = \iint_{\Sigma} \left[ xf(xy) + 2x - y \right] dy dz + \left[ yf(xy) + 2y + x \right] dz dx + \left[ zf(xy) + z \right] dx dy .$ 

【详解】将曲面  $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$  向 xoy 面投影得  $D_{xy}$ 

$$D_{xy}$$
为 $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ ,  $Z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, Z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 

 $I = -\iint_{D_{xy}} \{ [xf(xy) + 2x - y](-Z'_x) + [yf(xy) + 2y + x](-Z'_y) + [\sqrt{x^2 + y^2}f(xy) + \sqrt{x^2 + y^2}] \} dxdy$ 



新东方考研微信公众号: kaoyanxdf

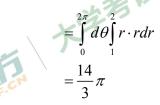




$$= -\iint_{D_{xy}} \left\{ \frac{1}{x^2 + y^2} [-xf(xy) - 2x^2 + xy - y^2 f(xy) - 2y^2 - xy] + \sqrt{x^2 + y^2} [f(xy) + 1] \right\} dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} -\sqrt{x^2 + y^2} f(xy) - 2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} f(xy) + \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$



#### (19) (本题满分 10 分)

设函数 f(x) 在 [0,2] 上具有连续导数. f(0) = f(2) = 0 ,  $M = \max_{x \in [0,2]} \{ |f(x)| \}$ 

证:(1)存在 $\xi \in (0,2)$ 使 $|f'(\xi)| \ge M$ 

(2)若对任意  $x \in (0,2), |f'(x)| \le M$  ,则 M = 0.

【详解】(I)证明:(1)M = 0时,则f(x) = 0,显然成立.

M>0时,不妨设在点 $c(\in(0,2))$ 处取得最大值|f(c)|=M.

由拉格朗日中值定理得, 存在  $\xi_1 \in (0,c)$ , 使得  $|f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} \right| = \frac{M}{c}$ ;

存在 
$$\xi_2 \in (c,2)$$
,使得  $|f'(\xi_2)| = \left| \frac{f(2) - f(c)}{2 - c} \right| = \frac{M}{2 - c}$ ;

所以 
$$(\frac{M}{c} - M)(\frac{M}{2 - c} - M) = -M^2 \frac{(c - 1)^2}{c(2 - c)}, 0, 即 M 介于 \frac{M}{c} 与 \frac{M}{2 - c}$$
 之间, 从而有

$$|f'(\xi_1)|..M$$
 或  $f'(\xi_2)|..M$ ,

结论得证.

(II)当c ≠ 1时, 采用反证法, 假设M > 0.

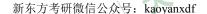
则 $|f'(\xi_1)|>M$ 或 $|f'(\xi_2)|>M$ ,与已知矛盾,假设不成立.

当c=1时,此时|f(1)|=M,易知f'(1)=0.

设G(x) = f(x) - Mx, 0, x, 1;则有G'(x) = f'(x) - M, 0,从而G(x)单调递减.

又 G(0) = G(1) = 0, 从而 G(x) = 0, 即 f(x) = Mx, 0, x, 1.

新东方网考研频道

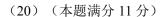






因此 f'(1) = M , 从而 M = 0.

综上所述, 最终M=0



设二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$  经正交变化  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  化为二次型  $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4x_1x_2 + 6y_2^2$ ,其中

- $a \ge b$ .
- (1) 求 a, b 的值
- (2) 求正交变换矩阵Q

【详解】(I)设 $f = x^T A x$ ,其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,经正交变换x = Q y

$$f = y^T Q^T A Q y = y^T B y$$
,  $\sharp + B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ ;

可知 $Q^TAQ = Q^{-1}AQ = B$ ,即A相似于B,则

可知
$$Q^*AQ = Q^*AQ = B$$
,即 $A$ 相似于 $B$ 
$$\begin{cases} tr(A) = tr(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$$
解得 $a = 4, b = 1$ ;

(II) 设
$$P_1^{-1}AP_1 = \Lambda, P_2^{-1}BP_2 = \Lambda$$
,则 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$ ,因此 $Q = P_1P_2^{-1}$ 

$$\begin{cases} tr(A) = tr(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$$
解得  $a = 4, b = 1$ ;
(II) 设  $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda, P_2^{-1}BP_2 = \Lambda, \text{则}(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B, \text{因此}Q = P_1P_2^{-1};$ 
由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0, \text{解出} \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5;$ 

$$(0E-A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ if } \xi_1 = (2,1)^T;$$

$$(5E-A) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{if } \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(0E-B) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ if } \eta_1 = (1,-2)^T;$$

$$(5E-B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \text{ if } \eta_2 = (2,1)^T ; P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

综上所述, 
$$Q = P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$
 .



微信公众号: kaoyanxdf





#### (21) (本题满分11分)

设A为2阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$ ,其中 $\alpha$ 是非零向量且不是A的特征向量.

(1)证明P为可逆矩阵.

(2)若  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ ,求  $P^{-1}AP$ ,并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【详解】(I)  $\alpha$  不是特征向量且  $\alpha \neq 0$ ,则  $A\alpha \neq k\alpha$ ,即  $A\alpha, \alpha$  线性无关, 所以 r(P)=2,矩阵 P 可逆.

(II) 设
$$P^{-1}AP = B$$
,则 $AP = PB$ ,即

$$A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^{2}\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha)$$
$$= (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 
$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
,则  $A \sim B$ ,

$$\left|\lambda E - B\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$ ,因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,所以B可以相似对角化,则A可以相似对角化.

#### (22) (本题满分11分)

设随机变量  $X_1,X_2,X_3$  相互独立,其中  $X_1$  与  $X_2$  均服从标准正态分布,  $X_3$  的概率分布为  $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2},Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2\,.$ 

- (1) 求二维随机变量 $(X_1,Y)$ 的分布函数,结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示;
- (2) 证明随机变量Y服从标准正态分布。

#### 【详解】([)

$$F(x,y) = P\{X_1 \le x, Y \le y\}$$

$$= \frac{1}{2}P\{X_1 \le x, X_2 \le y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \le x, X_1 \le y\}$$



新东方网考研频道

S. CN

新东方考研微信公众号: kaoyanxdf





$$= \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x)[1+\Phi(y)], x \le y \\ \frac{1}{2}\Phi(y)[1+\Phi(x)], x > y \end{cases}$$





(2) 
$$F_{Y}(y) = F_{X_{1},Y}(+\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y)[1+\Phi(+\infty)] = \Phi(y),$$

故 Y 服从标准正态分布.



(23) (本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命T的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, t \ge 0, & \text{其中 } \theta, m \text{ 为参数且大于零.} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 求概率  $P\{T > t\}$  与  $P\{T > s + t | T > s\}$ , 其中 s > 0, t > 0
- (2)任取n个这种元件做寿命试验,测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,...,t_n$ ,若m已知,求 $\theta$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$ 。

【详解】 (I) 
$$P\{T > t\} = 1 - P\{T \le t\} = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$$

$$P\{T > t + s \mid T > s\} = \frac{P\{T > t + s, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}} = e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m - \left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m};$$

(II) 求得密度函数 
$$f(t) = \begin{cases} \frac{mt^{m-1}}{\theta^m} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

故可构造似然函数为 $L(\theta) = m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-mn} e^{-\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m}$ 

取对数 
$$\ln L(\theta) = n \ln m + (m-1) \ln (t_1 t_2 \cdots t_n) - mn \ln \theta - \frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m$$

求导可得
$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = -\frac{mn}{\theta} + m \frac{1}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^{n} t_i^m = 0$$
,

解出 $\theta$ 的极大似然估计为 $\hat{\theta} = \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i^m}$ .





