2020 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题

一、　选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）当 $x\to 0^+$，下列无穷小量中最高阶的是

（A）$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　（B）$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$

（C）$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$．　（D）$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

【答案】（D）．

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则（）

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$

【答案】（C）．

（3）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，$f(0,0)=0$，$\vec{n}=\left(f_x^{'},f_y^{'},-1\right)\Big|_{(0,0)}$，非 0 向量 $\alpha\perp\vec{n}$，则（）

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　（B）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\vec{n}\times x(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\alpha\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　（D）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\alpha\times x(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

【答案】（A）．

（4）R 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，r 为实数，则（）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 发散，则 $|r| \ge R$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 收敛，则 $|r| \le R$

（C）$|r| \ge R$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 发散　　（D）$|r| \le R$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 收敛

【答案】（A）.

（5）若矩阵 A 由初等列变换为矩阵 B，则（）

（A）存在矩阵 P，使 $PA = B$；　　（B）存在矩阵 P，使 $BP = A$；

（C）存在矩阵 P，使 $PB = A$；　　（D）方程组 $AX = 0$ 与 BX=0 同解；

【答案】（B）.

（6）已知 $\begin{matrix} l_1: \dfrac{x-a_2}{a_1} = \dfrac{y-b_2}{b_1} = \dfrac{z-c_2}{c_1} \\ l_2: \dfrac{x-a_3}{a_3} = \dfrac{y-b_3}{b_2} = \dfrac{z-c_3}{c_2} \end{matrix}$ 相交于一点，令 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$，$i = 1,2,3$，则（）

（A）α_1 可由 α_2，α_3 线性表示　　（B）α_2 可由 α_1，α_3 线性表示

（C）α_3 可由 α_1，α_2 线性表示　　（D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

【答案】（C）.

（7）$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则 A,B,C 恰好发生一个的概率为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{5}{12}$

【答案】（D）.

（8）设为 $x_1,x_2,\dots,x_{100}$ 来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{x=0\} = P\{x=1\} = \dfrac{1}{2}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则由中心极限定理可知，$P\{\sum_{i=1}^{100} x \le 55\}$ 的近似值为（　）

（A）$1-\Phi(1)$　　（B）$\Phi(1)$　　（C）$1-\Phi(0.2)$　　（D）$\Phi(0.2)$

【答案】（B）.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$__________.

【答案】-1

（10）设$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$,则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ __________.

【答案】$-\sqrt{2}$

（11）设函数$f(x)$满足$f''(x)+af'(x)+f(x)=0\ (a>0)$，且$f(0)=m$，$f'(0)=n$，则$\int_0^{+\infty}f(x)dx=$__________.

【答案】$am+n$

（12）设函数$f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$,则$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$__________.

【答案】4e

（13）行列式$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$__________.

【答案】a^4-4a^2.

（14）已知随机变量X服从区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上的均匀分布,$Y=\sin X$,则$Cov(X,Y)=$__________.

【答案】$\dfrac{2}{\pi}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

（15）（本题满分 10 分）

求函数$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$的极值.

【详解】$\begin{cases} f_x'=3x^2-y=0 \\ f_y'=24y^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{6} \\ y=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

又 $\begin{cases} f_{xx}''=6x \\ f_{xy}''=-1 \\ f_{yy}''=48y \end{cases}$ 当 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 时 $\begin{cases} A=0 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$，

$AC-B^2=-1<0$，不为极值点

当 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{6} \\ y=\dfrac{1}{12} \end{cases}$ 时 $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=4 \end{cases}$，$\begin{cases} AC-B^2=3>0 \\ A=1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{6} \\ y=\dfrac{1}{12} \end{cases}$，为极小值点

极小值为 $f(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12})=-\dfrac{1}{216}$

（16）（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_L \dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

【详解】补曲线 $L_1: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针方向

$$I-\int_{L_1} Pdx+Qdy=\iint_{\Sigma-\Sigma_1} \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4x^2+y^2-(x+y)8x}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)-2y(4x-y)}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$I=\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(4x-y)dx+(x+y)dy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_1}[1-(-1)]dxdy$$

$$=\pi$$

（17）（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$.证明:当$|x|<1$时幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛并求其和函数.

【详解】（Ⅰ）$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1$

则$R=\frac{1}{\rho}=1$，所以当$|x|<1$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛.

（Ⅱ）令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+a_1$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_nx^n+1=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+1$$
$$=xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)+1$$
$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}\left[2+S(x)\right]$$
$$\int\frac{dS(x)}{2+S(x)}=\int\frac{dx}{2(1-x)}$$
$$\ln|2+S(x)|=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\ln C_1$$
$$2+S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}$$

因为$S(0)=0$，所以和函数：$S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,\quad(-1<x<1)$.

（18）（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le x^2+y^2\le 4)$ 下侧，$f(x)$为连续函数．计算$I=\iint_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]dydz+\left[yf(xy)+2y+x\right]dzdx+\left[zf(xy)+z\right]dxdy$.

【详解】将曲面$Z=\sqrt{x^2+y^2}$向xoy面投影得D_{xy}

D_{xy}为$1\le x^2+y^2\le 4$，又$Z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},Z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$I=-\iint_{D_{xy}}\{[xf(xy)+2x-y](-Z_x')+[yf(xy)+2y+x](-Z_y')+[\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}]\}dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{\frac{1}{x^2+y^2}[-xf(xy)-2x^2+xy-y^2f(xy)-2y^2-xy]+\sqrt{x^2+y^2}[f(xy)+1]\}dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}-\sqrt{x^2+y^2}f(xy)-2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r\cdot rdr$$

$$=\frac{14}{3}\pi$$

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数. $f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

证:(1)存在 $\xi\in(0,2)$ 使 $|f'(\xi)|\ge M$

(2)若对任意 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$，则 $M=0$.

【详解】（Ⅰ）证明: (1) $M=0$ 时, 则 $f(x)=0$，显然成立.

$M>0$ 时, 不妨设在点 $c(\in(0,2))$ 处取得最大值 $|f(c)|=M$.

由拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi_1\in(0,c)$，使得 $|f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(c)-f(0)}{c-0}\right|=\frac{M}{c}$；

存在 $\xi_2\in(c,2)$，使得 $|f'(\xi_2)|=\left|\frac{f(2)-f(c)}{2-c}\right|=\frac{M}{2-c}$；

所以 $(\frac{M}{c}-M)(\frac{M}{2-c}-M)=-M^2\frac{(c-1)^2}{c(2-c)}\le 0$，即 M 介于 $\frac{M}{c}$ 与 $\frac{M}{2-c}$ 之间, 从而有

$$|f'(\xi_1)|\ge M \text{ 或 } f'(\xi_2)|\ge M,$$

结论得证.

（Ⅱ）当 $c\ne 1$ 时, 采用反证法, 假设 $M>0$.

则 $|f'(\xi_1)|>M$ 或 $|f'(\xi_2)|>M$，与已知矛盾, 假设不成立.

当 $c=1$ 时, 此时 $|f(1)|=M$，易知 $f'(1)=0$.

设 $G(x)=f(x)-Mx$，$0\le x\le 1$；则有 $G'(x)=f'(x)-M\le 0$，从而 $G(x)$ 单调递减.

又 $G(0)=G(1)=0$，从而 $G(x)=0$，即 $f(x)=Mx$，$0\le x\le 1$.

因此 $f'_-(1)=M$，从而 $M=0$.

综上所述，最终 $M=0$

（20）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变化 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4x_1x_2+6y_2^2$，其中 $a\ge b$.

(1) 求 a,b 的值

(2) 求正交变换矩阵 Q

【详解】（Ⅰ）设 $f=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$，经正交变换 $x=Qy$，

$$f=y^TQ^TAQy=y^TBy，\text{其中 } B=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix};$$

可知 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=B$，即 A 相似于 B，则

$\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\|A|=|B|\end{cases}$ 解得 $a=4,b=1$；

（Ⅱ）设 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda,P_2^{-1}BP_2=\Lambda$，则 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A\left(P_1P_2^{-1}\right)=B$，因此 $Q=P_1P_2^{-1}$；

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-4\end{vmatrix}=0$，解出 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$；

$(0E-A)=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\xi_1=(2,1)^T$；

$(5E-A)=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\xi_2=(1,-2)^T$；$P_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$；

$(0E-B)=\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\eta_1=(1,-2)^T$；

$(5E-B)=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\eta_2=(2,1)^T$；$P_2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$；

综上所述，$Q=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

（21）（本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵, $P=(\alpha, A\alpha)$,其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(1)证明 P 为可逆矩阵.

(2)若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$,求 $P^{-1}AP$,并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【详解】（Ⅰ）**α 不是特征向量且 $\alpha \neq 0$，则 $A\alpha \neq k\alpha$，即 $A\alpha, \alpha$ 线性无关，**

所以 $r(P)=2$，矩阵 P 可逆.

（Ⅱ）设 $P^{-1}AP=B$，则 $AP=PB$，即

$$A(\alpha, A\alpha)=(A\alpha, A^2\alpha)=(A\alpha, 6\alpha - A\alpha)$$

$$=(\alpha, A\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 $P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $A \sim B$，

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2)=0$$

$\lambda_1=-3, \lambda_2=2$，因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 B 可以相似对角化，则 A 可以相似对角化.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$。

（1） 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数，结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示；

（2） 证明随机变量 Y 服从标准正态分布。

【详解】（Ⅰ）

$$F(x,y)=P\{X_1 \le x, Y \le y\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_1 \le x, X_2 \le y\}+\frac{1}{2}P\{X_1 \le x, X_1 \le y\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(x)[1+\Phi(y)],x\le y\\ \frac{1}{2}\Phi(y)[1+\Phi(x)],x>y\end{cases}$$

(2) $F_Y(y)=F_{X_1,Y}(+\infty,y)=\frac{1}{2}\Phi(y)[1+\Phi(+\infty)]=\Phi(y)$,

故 Y 服从标准正态分布.

（23）（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$F(t)=\begin{cases}1-e^{-(\frac{t}{\theta})^m},t\ge 0\\ 0,其它\end{cases}$，其中 θ，m 为参数且大于零。

（1）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

（2）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,...,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$。

【详解】（Ⅰ）$P\{T>t\}=1-P\{T\le t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$,

$$P\{T>t+s\,|\,T>s\}=\frac{P\{T>t+s,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m};$$

（Ⅱ）求得密度函数 $f(t)=\begin{cases}\frac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},t\ge 0\\ 0,t<0\end{cases}$,

故可构造似然函数为 $L(\theta)=m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}\theta^{-mn}e^{-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$,

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m+(m-1)\ln(t_1t_2\cdots t_n)-mn\ln\theta-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$

求导可得 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\frac{1}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0$,

解出 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$.