



2020 考研数学真题 (数学二)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是 ()

A. $\int_0^x (e^{t^2} - 1)dt$ B. $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3})dt$ C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

解析: 本题选 D. 考查了无穷小量的阶的比较, 同时考查了变上限积分的函数的求导方法、洛必达法则等. 用求导定阶法来判断. 在 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$\left(\int_0^x (e^{t^2} - 1)dt \right)' = e^{x^2} - 1 \sim x^2;$$

$$\left(\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3})dt \right)' = \ln(1 + \sqrt{x^3}) \sim x^{\frac{3}{2}};$$

$$\left(\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \right)' = \sin(\sin x)^2 \cos x \sim x^2;$$

$$\left(\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt \right)' = \sqrt{\sin^3(1-\cos x)} \sin x \sim x \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3} \sim \frac{\sqrt{2}}{4} x^3 |x|.$$

2. 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析: 本题选 C. 本题考查了间断点的概念与分类、极限的计算. 间断点有 $x = -1, 0, 1, 2$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)} = -\frac{1}{2e};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty$$

3. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = ()$

A. $\frac{\pi^2}{4}$ B. $\frac{\pi^2}{8}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{8}$

解析: 本题选 A. 本题考查了定积分的计算, 主要内容是第二换元积分法.



$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t \cos t} 2 \sin t \cos t dt = t^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

4. 已知 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 当 $n \geq 3$ 时, $f^{(n)}(0) = (\quad)$

- A. $-\frac{n!}{n-2}$ B. $\frac{n!}{n-2}$ C. $-\frac{(n-2)!}{n}$ D. $\frac{(n-2)!}{n}$

解析: 选 A. 本题考查了函数在 0 处的高阶导数的计算。有泰勒公式求解:

$$f(x) = x^2 \ln(1-x) = x^2 \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \cdots - \frac{1}{n-2}x^{n-2} \right) + o(x^n)$$

$$\therefore \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n-2}, f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n-2}.$$

5. 关于 $f(x, y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0, \\ x, & y = 0, \\ y, & x = 0, \end{cases}$ 给出下列结论:

(1) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 1$ (2) $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 1$ (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

(4) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$

其中正确的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

解析: 本题考查了分块函数在分界线上某点处的偏导数求法, 二元函数极限与累次极限等计算。需要用到偏导数的定义式等。

$$(1) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$(2) \text{ 因为 } f(x, y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0, \\ x, & y = 0, \\ y, & x = 0, \end{cases} \text{ 当 } xy \neq 0 \text{ 时, } \frac{\partial f}{\partial x} = y,$$

$$\text{此时 } \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 1}{y} = \infty$$

故 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)}$ 不存在。

$$(3) \text{ 因为 } f(x, y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0, \\ x, & y = 0, \\ y, & x = 0, \end{cases} \text{ 所以当 } xy \neq 0 \text{ 时, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时,}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0, \text{ 当 } x = 0 \text{ 时,}$$



$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$, 所以点 (x,y) 沿着任意方向趋近于 $(0,0)$ 时, 极限均为 0, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

(4) 因为 $f(x,y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0, \\ x, & y = 0, \\ y, & x = 0, \end{cases}$ 所以当 $xy \neq 0$ 时, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} xy = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$, 当 $y = 0$ 时, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$,

当 $x = 0$ 时, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0$, 综上 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$.

选 B.

6. 设 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则 ()

- A. $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ B. $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$ C. $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$ D. $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解析: 本题选 B. 考查了函数的单调性, 辅助函数构造等问题.

由 $f'(x) > f(x) > 0$, 可知 $f'(x) - f(x) > 0$, 可以构造辅助函数: $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

由导数符号可知函数 $F(x)$ 在 $(-2, 2)$ 单调递增. 由 $F(0) > F(-1)$ 容易推得选 B.

7. 四阶矩阵 A 不可逆, $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, 则 $A^*X = 0$ 的通解为 ()

- A. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ B. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$
B. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$ D. $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$

解析: 本题选 C. 考查了线性齐次方程组通解的结构、伴随矩阵秩的公式、 AA^* 的公式.

由于 $A_{12} \neq 0$, 故 $r(A^*) \geq 1$, 再由伴随矩阵秩的公式 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$, 可知 $r(A^*) = 1, r(A) = 3$.

$A^*x = 0$ 的基础解系由 3 个解向量构成. 又因为 $A^*A = |A|E = O$, A 的每一列都 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $A^*x = 0$ 的解向量. 只要找到 $A^*x = 0$ 的 3 个无关解就构成基础解系. 抓住 $A_{12} \neq 0$ 这一条件. 由

$$AA^* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{14} \end{bmatrix} = O \text{ 可知,}$$

$A_{11}\alpha_1 + A_{12}\alpha_2 + A_{13}\alpha_3 + A_{14}\alpha_4 = 0$, 因为 $A_{12} \neq 0$, 因此 α_2 可由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 故 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 原因是 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 若 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则其中有一个向量可由其余两个线性表示, 秩就小于 3 了, 可推出矛盾. 因此 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 为基础解系, 选 C.

8. A 为 3 阶方阵, α_1, α_2 为属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的属于 -1 的特征向量, 满足



$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为 ()

- A. $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$ B. $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
B. $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$ D. $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

解析: 本题选 D。考查了矩阵相似对角化的相关理论与特征向量的性质。

矩阵 P 的每一列要与特征值对应起来。由题目已知, P 的第一列与第三列必须是 1 的特征向量, P 的第二列必须是 -1 的特征向量。由特征向量的性质可知选 D。

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $-\sqrt{2}$

【解析】

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}} = -\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^3}, \quad \therefore \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\sqrt{2}.$$

10. 求 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}$

【解析】: 交换积分次序,

$$\therefore \text{原式} = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^3 + 1} dy = \int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} d(x^3 + 1) = \frac{1}{3} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1$$

$$\text{原式} = \frac{2}{9} (2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}$$

11. 设 $z = \arctan[xy + \sin(x + y)]$, 则 $dz|_{(0, \pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $(\pi - 1)dx - dy$

【解析】: $\frac{dz}{dx} = \frac{y + \cos(x + y)}{1 + [xy + \sin(x + y)]^2}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x + \cos(x + y)}{1 + [xy + \sin(x + y)]^2}$, 代入 $(0, \pi)$,



$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{\pi + \cos \pi}{1 + (\sin \pi)^2} = \pi - 1, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\cos \pi}{1 + (\sin \pi)^2} = -1;$$

$$\therefore dz|_{(0,\pi)} = (\pi - 1)dx - dy$$

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g , 水密度为 ρ , 则三角形平板的一侧收到的压力为_____.

答案: $\frac{1}{3}\rho ga^3$

【解析】 $F = \int_0^a 2\rho g(a-y)ydy = 2\rho g \int_0^a (ay - y^2)dy = 2\rho g(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3) = \frac{1}{3}\rho ga^3$

13. 设 $y = y(x)$ 满足 $y'' + 2y' + y = 0$, 且 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x)dx =$ _____.

答案: 1

【解析】 $y'' + 2y' + y = 0$, 所以特解方程: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$;

$\therefore y_{\text{通}} = (C_1 + C_2x)e^{-x}$; $y'_{\text{通}} = e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2x)$; 又 $\because y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

$\therefore \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}, \therefore y_{\text{通}} = xe^{-x}$

$\therefore \int_0^{+\infty} y(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} -e^{-x}(x+1)|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-x}(x+1)] - \lim_{x \rightarrow 0^+} [-e^{-x}(x+1)] = 1$

14. 求 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ _____.

答案: $a^4 - 4a^2$

【解析】 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第4行加} \\ \text{至第3行}}} \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & a \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第1列} \\ \text{展开}}} a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$

继续将第 1 列展开,

原式 $= a \cdot \left(a^3 + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & a \end{vmatrix} \right) + (-1)(-1)^{1+2} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = a^4 + 2a \cdot (-2a) = a^4 - 4a^2$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

15. (本题满分 10 分).



求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} (x > 0)$ 的斜渐近线。

【解析】：斜率 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{1}{e}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right]$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则 } t \rightarrow 0^+, \text{ 原式} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e - (1+t)^{\frac{1}{t}}}{e t (1+t)^{\frac{1}{t}}} = -\frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)} - e}{t} = \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)-1} - 1}{t}$$

$$= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t} \ln(1+t) - 1}{t} = -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2e}$$

所以斜渐近线方程为: $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$

16. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解析】：因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f(x)$ 连续, 则

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$\text{令 } xt = u, \text{ 则 } g(x) = \int_0^1 f(xt)dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du$$

$$\text{因为 } g(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0$$

$$\text{所以 } g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{则 } g'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2}$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

17. (本题满分 10 分)

求 $f(x) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值。

$$\text{解: } \begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - y = 0 \\ f'_y(x, y) = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases} \text{ 所以驻点为 } (0,0) \text{ 或 } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

$$A = f''_{xx}(x, y) = 6x$$

$$B = f''_{xy}(x, y) = -1$$

$$C = f''_{yy}(x, y) = 48y$$

代入 $(0,0)$, 此时 $AC - B^2 < 0$ 所以不是极值点

代入 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$, $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$, 所以 $f = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{216}$ 为极小值

18. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 且满足 $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}}$

(I) 求 $f(x)$;

(II) 求曲线 $y = f(x)$, $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 围成的图形绕 x 轴旋转一周的体积。

$$\text{【解析】 (I): 由 } 2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}} \dots\dots ①$$

$$\text{得 } 2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2x+1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{则 } 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{2x^2 + x}{\sqrt{1+x^2}} \dots\dots ②$$

$$① \times 2 - ② \text{ 得: } 3f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$$



故 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in (0, +\infty)$

(2) 体积: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

$$V = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} yg(y)dy$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$\stackrel{y=\sin t}{=} 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t dt$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \pi \left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 0 \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

19. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} d\sigma$, 其中区域 D 由 $x=1, x=2, y=x$ 及 x 轴围成.

【解析】: $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{r}{r \cos\theta} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} d\theta$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta d\theta$$

其中 $\int \sec^3\theta d\theta = \int \sec\theta \tan\theta = \sec\theta \tan\theta - \int \tan\theta d\sec\theta$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \sec\theta \tan^2\theta d\theta$$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \sec\theta (\sec^2\theta - 1) d\theta$$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \sec^3\theta d\theta + \int \sec\theta d\theta$$

$$= \sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| - \int \sec^3\theta d\theta$$

所以 $\int \sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2} (\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|) + C$

则 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} d\sigma = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta d\theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} (\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$

20. (本题满分 11 分)



已知 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$

(1) 证明: $\exists \xi \in (1, 2), s.t. f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$

(2) 证明: $\exists \eta \in (1, 2), s.t. f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$

解答: $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ 所以 $f(1) = 0$, 且 $f'(x) = e^{x^2}$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$

(1) 构造 $F(x) = f(x) - (2 - x)e^{x^2}$, 则 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续,

且 $F(1) = f(1) - e = -e < 0$, $F(2) = f(2) - 0 = f(2) > 0$,

由零点定理知 $\exists \xi \in (1, 2), s.t. F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$

(2) 构造 $g(x) = \ln x, x \in [1, 2]$

则 $f(x), g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上可导.

由柯西中值定理知:

$$\exists \eta \in (1, 2), s.t. \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

$$\text{即 } \frac{f(2)}{\ln 2} = \frac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}, \text{ 所以 } f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$$

21. (本题满分 11 分)

已知 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0 (x \geq 0)$. 曲线 $y = f(x)$ 过原点, 点 M 为曲线 $y = f(x)$ 上任意一点, 过点 M 的切线与 x 轴相交于点 T , 过点 M 做 MP 垂直于 x 轴于点 P , 且曲线 $y = f(x)$ 与直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 $3:2$, 求曲线满足的方程.

【解析】: 设 $M(a, f(a))$

所以切线方程: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$\text{当 } y = 0, x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

且

$$\begin{aligned} S_{\Delta MTP} &= \frac{1}{2} \cdot f(a) \cdot \left[a - \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{f^2(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$

$$\text{由题意得: } \frac{\int_0^a f(x) dx}{\frac{1}{2} \frac{f^2(a)}{f'(a)}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{整理得: } \int_0^a f(x) dx = \frac{3}{4} \frac{f^2(x)}{f'(a)}$$

$$\text{换成熟悉的公式: } \int_0^x f(t) dt = \frac{3}{4} \frac{f^2(x)}{f'(x)} \quad (1) \text{ 且 } f(0) = 0$$

对 (1) 两边同时求导整理后得:

$$\frac{3}{2} f''(x) \cdot f(x) = [f'(x)]^2, \text{ 所以 } f'(0) = 0$$



$$\text{令 } f(x) = y, f'(x) = p, f''(x) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$\text{整理, 得 } \frac{3}{2} p \frac{dp}{dy} y = p^2$$

$$\text{分离变量得, } \frac{3}{2} \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}$$

$$p^{\frac{3}{2}} = C_1 y$$

$$\text{所以 } y' = C_2 y^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{再分离变量, 得 } \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int C_2 dx$$

$$\text{所以 } 3y^{\frac{1}{3}} = C_2 x + C_3$$

$$\text{则 } y = \left(\frac{C_2 x + C_3}{3} \right)^3$$

$$\text{又 } f(0) = 0, f'(0) = 0$$

$$\text{所以 } C_3 = 0$$

$$\text{则 } y = Cx^3, C \text{ 为任意常数。}$$

22. (本题满分 11 分)

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $x = Py$ 变换为

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$$

(I) 求 a 的值;

(II) 求可逆矩阵 P .

【解析】: (I) $f(x_1, x_2, x_3)$ 的二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

$g(y_1, y_2, y_3)$ 的二次型矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

显然 $r(B) = 2$, 经可逆线性变换 $x = Py$, 则 $r(A) = r(B) = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1+2a)(1-a)^2 = 0$$

$$a = 1 \text{ 或 } a = -\frac{1}{2}$$

当 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$, 舍去。



故 $a = -\frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_3) \\ z_3 = x_3 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 + z_3 \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}z_2 + z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2 = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = 2y_3 \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$



所求可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

23. (本题满分 11 分)

设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, α 是非零向量且不是 A 的特征向量。

(I) 证明矩阵 P 可逆;

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$ 并判断 A 是否相似于对角矩阵。

【解析】(I) 设 $k_1\alpha + k_2A\alpha = 0$

① 若 $k_2 = 0$, 则由 $\alpha \neq 0$ 知 $k_1 = 0$;

② 若 $k_2 \neq 0$, 则 $A\alpha = -\frac{k_1}{k_2}\alpha$, 所以 α 是 A 的属于特征值 $-\frac{k_1}{k_2}$ 的特征向量, 与已知条件产生矛盾。

所以, $k_1 = k_2 = 0$, 向量组 $\alpha, A\alpha$ 线性无关, 故矩阵 P 可逆。

(II) 因为 $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$, 所以,

$$(A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

记 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 因此,

$$A(\alpha, A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

即 $AP = PB$, 由 P 可逆知 A, B 相似且 $P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。

由 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3) = 0$ 知, 矩阵 A, B 的特征值均为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$,

因为特征值互不相同, 故矩阵 A 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ 。