



2020 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三)试题及解析

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = (\quad)$

- (A). $b \sin a$
- (B). $b \cos a$
- (C). $b \sin f(a)$
- (D). $b \cos f(a)$

【答案】 B

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{f(x) - a} \cdot \frac{f(x) - a}{x - a} = \cos f(x) \Big|_{x=a} \cdot b = b \cos f(a)$$

设 $f(x) = u$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{f(x) - a} = \lim_{u \rightarrow f(a)} \frac{\sin u - \sin a}{u - a} = \cos u \Big|_{u=f(a)} = \cos f(a)$

$$\begin{aligned} \text{则 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{f(x) - a} \cdot \frac{f(x) - a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{f(x) - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} \\ &= b \cos a \end{aligned}$$

(2) 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$, 则第二类间断点个数为 ()

- (A). 1
- (B). 2
- (C). 3
- (D). 4

【答案】 C

【解析】 本题考查的是第一类间断点与第二类间断点的定义, 判断间断点及类型的一般步骤为:

1. 找出无定义的点 (无意义的点); 2. 求该点的左右极限; 3. 按照间断点的定义判定.



第二类间断点的定义为 $f_-(x_0), f_+(x_0)$ 至少有一个不存在, 很显然 $f(x)$ 不存在的点为

$$x = -1, x = 0, x = 1, x = 2.$$

在 $x = -1$ 处, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$;

在 $x = 0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2e}$;

在 $x = 1$ 处, $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$;

在 $x = 2$ 处, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$;

所以, 第二类间断点为 3 个。

(3) 对奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数, 则()

(A). $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数

(B). $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是偶函数

(C). $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是奇函数

(D). $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是偶函数

【答案】: A

【解析】 $f(x)$ 为奇函数, 则其导数 $f'(x)$ 为偶函数, 又 $\cos x$ 为偶函数, 则 $\cos f(x) = \cos f(-x)$, 则 $\cos f(x)$ 为偶函数, 故 $\cos f(x) + f'(x)$ 为偶函数, 以 0 为下限、被积函数为偶函数的变限积分函数为奇函数。所以, 本题选 A; 对于 C 和 D 选项, $f'(x)$ 为偶函数, 则 $\cos f'(x) = \cos f'(-x)$ 为偶函数, $f(x)$ 为奇函数, 则 $\cos f'(x) + f(x)$ 既非奇函数又非偶函数。

(4). 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

(A). $(-2, 6)$

(B). $(-3, 1)$

(C). $(-5, 3)$

(D). $(-17, 15)$

【答案】 B



【解析】由比值法可知，幂级数收敛时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x+1)^{2n+2}}{a_n(x+1)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| (x+1)^2 < 1$

则要求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^{2n}$ 的收敛区间，只需要求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 的值即可，

而条件告诉我们幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$ ，即收敛半径为 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| (x+1)^{2n} = \frac{1}{4}(x+1)^2 < 1, \text{ 即 } -3 < x < 1$$

所以本题选 B。

(5) 设 4 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆， a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$ ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组， A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $A^*x = 0$ 的通解为 ()

- (A) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ (B) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$
 (C) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$ (D) $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$

【答案】(C)

【解析】 $A = (a_{ij})$ 不可逆知， $|A| = 0$ 及 $r(A) < 4$ ；由 $A_{12} \neq 0$ 知 $A^* \neq O$ 且 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关（无关组的延长组仍无关），故 $r(A) = 3$ 及 $r(A^*) = 1$ ，故 $A^*x = 0$ 的基础解系含有 3 个向量。由 $A^*A = |A|E = O$ 知， A 的列向量均为 $A^*x = 0$ 的解，故通解为 $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$ 。

(6) 设 A 为 3 阶矩阵， α_1, α_2 为 A 的特征值 1 对应的两个线性无关的特征向量， α_3 为 A 的特征值 -1 的特征向量。若

存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 P 可为 ()

- (A) $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$ (B) $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
 (C) $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$ (D) $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

【答案】(D)



【解析】因为 α_1, α_2 为 A 的特征值 1 对应的两个线性无关的特征向量，故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2$ 仍为特征值 1 的两个线性无关的特征向量；因为 α_3 为 A 的特征值 -1 的特征向量，故 $-\alpha_3$ 仍为特征值 -1 的特征向量，因为特征向量与特征值的排

序一一对应，故只需 $P = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$ ，就有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(7) $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$ ，则 A, B, C 恰好发生一个的概率为 ()

(A). $\frac{3}{4}$

(B). $\frac{2}{3}$

(C). $\frac{1}{2}$

(D). $\frac{5}{12}$

【答案】(D)

【解析】

$$\begin{aligned} & P(\overline{ABC}) + P(\overline{ABC}) + P(\overline{ABC}) \\ &= P(A \cap \overline{B \cup C}) + P(B \cap \overline{A \cup C}) + P(C \cap \overline{A \cup B}) \\ &= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) + P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC) \\ &+ P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \end{aligned}$$

又 $ABC \subset AB$ ， $P(ABC) \leq P(AB) = 0$

$$\text{原式} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

(8) 若二维随机变量 (X, Y) 服从 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$ ，则下列服从标准正态分布且与 X 独立的是 ()

(A). $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$

(B). $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$

(C). $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$

(D). $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

【答案】(C)



【解析】

由二维正态分布可知 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,4)$, $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 3,$$

所以 $X+Y \sim N(0,3)$, $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \sim N(0,1)$

$$\text{又 } \text{cov}(X, X+Y) = \text{cov}(X, X) + \text{cov}(X, Y) = DX + \rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 0$$

所以 X 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ 独立

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) $z = \arctan(xy + \sin(x+y))$, 则 $dz|_{(0,\pi)} =$ _____.

【答案】 $dz|_{(0,\pi)} = (\pi-1)dx - dy$

【解析】 $\frac{dz}{dx} = \frac{y + \cos(x+y)}{1 + (xy + \sin(x+y))^2}$, $\frac{dz}{dy} = \frac{x + \cos(x+y)}{1 + (xy + \sin(x+y))^2}$, 将 $x=0, y=\pi$ 代入可知,

$$dz|_{(0,\pi)} = (\pi-1)dx - dy$$

(10) 已知曲线满足 $x + y + e^{2xy} = 0$, 求曲线在点 $(0, -1)$ 处的切线方程

【答案】 $y = x - 1$

【解析】 在 $x + y + e^{2xy} = 0$ 两侧同时对 x 求导有 $1 + \frac{dy}{dx} + e^{2xy}(2y + 2x\frac{dy}{dx}) = 0$, 将 $x=0, y=-1$ 代入可知 $\frac{dy}{dx} = 1$,

所以切线方程为 $y = x - 1$

(11) 设产量为 Q , 单价为 P , 厂商成本函数为 $C(Q) = 100 + 13Q$, 需求函数为 $Q(P) = \frac{800}{P+3} - 2$, 求厂商取得最大利润时的产量

【答案】 $Q = 8$

【解析】 由 $Q(P) = \frac{800}{P+3} - 2$ 可知 $P = \frac{800}{Q+2} - 3$, 则利润函数为

$$L(Q) = \left(\frac{800}{Q+2} - 3\right)Q - (100 + 13Q), \quad \frac{dL(Q)}{dQ} = \frac{1600}{(Q+2)^2} - 16, \quad \text{令 } \frac{dL(Q)}{dQ} = 0 \text{ 可得, } Q = 8, \text{ 此时}$$



$$\frac{d^2L(Q)}{dQ^2} = -\frac{3200}{(Q+2)^3} < 0, \text{ 故取得最大利润}$$

(12) 设平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{2}, y, \frac{1}{1+x^2}, 0, x, 1 \right\}$, 则求 D 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积

【答案】 $\pi(\ln 2 - \frac{1}{3})$

【解析】 由题意列式得 $V = \int_0^1 2\pi x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx = \pi \left(\ln(1+x^2) - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \pi(\ln 2 - \frac{1}{3})$

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$

【答案】 $a^2(a^2 - 4)$

【解析】

$$\text{原式} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 2 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2(a^2 - 4)$$

(14) 随机变量 X 的分布律为 $P(X=k) = \frac{1}{2^k}, k=1,2,\dots, Y$ 为 X 被 3 除的余数, 则 $EY =$ _____

解析

$$P\{Y=0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X=3n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{7}$$

$$P\{Y=1\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X=3n+1\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{8^n} = \frac{4}{7}$$

$$P\{Y=2\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X=3n+2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{8^n} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore EY = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分 10 分) 设 a, b 为常数, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 为等价无穷小, 求 a, b 的值。



$$\begin{aligned} \text{【解析】} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n^a}} &= \frac{1}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e}{\frac{1}{n^a}} = \frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} - 1}{\frac{1}{n^a}} \\ &= \frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n^a}} = \frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^a}} \quad \text{①,} \end{aligned}$$

由于 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ ($n \rightarrow \infty$), 则 $a=1$, 且①式 $= \frac{-\frac{1}{2}e}{b} = 1$, 得 $b = -\frac{1}{2}e$.

(16)(本题满分 10 分) 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

$$\text{【解析】} \begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - y = 0 \\ f'_y(x, y) = 24y^2 - x = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}.$$

且 $A = f''_{xx}(x, y) = 6x$, $B = f''_{xy}(x, y) = -1$, $C = f''_{yy}(x, y) = 48y$.

讨论: ①对于 $(0, 0)$, 求得 $A=0, B=-1, C=0$, 因 $AC - B^2 < 0$, 则 $(0, 0)$ 不为极值点;

②对于 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$, 求得 $A=1, B=-, C=4$, 因 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$, 则 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值为 $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{216}$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 且有 $f(0) = 1, f'(0) = -1$.

(I) 求 $f(x)$; (II) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x) dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

【解析】(I) 由 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 得 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, 解得 $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$,



则 $f(x) = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, 又由 $f(0) = 1, f'(0) = -1$ 得 $C_1 = 1, C_2 = 0$,

则 $f(x) = e^{-x} \cos 2x$.

(II)

$$a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} \cos 2x dx = \left. \frac{\begin{matrix} -e^{-x} & -2\sin 2x \\ e^{-x} & \cos 2x \end{matrix}}{1+4} \right|_{n\pi}^{+\infty} = \frac{1}{5} (-e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x) \Big|_{n\pi}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{5} e^{-x} (-\cos 2x + 2\sin 2x) \Big|_{n\pi}^{+\infty} = \frac{1}{5} e^{-n\pi},$$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{5} \frac{1}{e^{\pi} - 1}.$$

(18)(本题满分 10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy$,

计算 $\iint_D xf(x, y) dx dy$.

【解析】 设 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$, 则 $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + Ax$,

$$\text{两边同取积分得 } A = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D y\sqrt{1-x^2} dx dy + \iint_D Ax dx dy$$

$$= \iint_D y\sqrt{1-x^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} y\sqrt{1-x^2} dx dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy$$



$$= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.$$

$$\text{则 } f(x,y) = y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x, \iint_D xf(x,y) dx dy = \iint_D x \left(y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x \right) dx dy$$

$$= \frac{3\pi}{16} \iint_D x^2 dx dy = \frac{3\pi}{16} \cdot 2 \iint_{D_1} x^2 dx dy = \frac{3\pi}{16} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \frac{3\pi}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 r dr = \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4}.$$

(19)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0,2]} \{|f(x)|\}$.

证:(1)存在 $\xi \in (0,2)$ 使 $|f'(\xi)| \geq M$

(2)若对任意 $x \in (0,2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

证明:(1) $M = 0$ 时, 则 $f(x) = 0$, 显然成立.

$M > 0$ 时, 不妨设在点 $c \in (0,2)$ 处取得最大值 $|f(c)| = M$.

由拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi_1 \in (0,c)$, 使得 $|f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} \right| = \frac{M}{c}$;

存在 $\xi_2 \in (c,2)$, 使得 $|f'(\xi_2)| = \left| \frac{f(2) - f(c)}{2 - c} \right| = \frac{M}{2 - c}$;

所以 $\left(\frac{M}{c} - M\right)\left(\frac{M}{2-c} - M\right) = -M^2 \frac{(c-1)^2}{c(2-c)} \leq 0$, 即 M 介于 $\frac{M}{c}$ 与 $\frac{M}{2-c}$ 之间, 从而有

$$|f'(\xi_1)| \leq M \text{ 或 } |f'(\xi_2)| \leq M,$$

结论得证.

(II) 当 $c \neq 1$ 时, 采用反证法, 假设 $M > 0$.

则 $|f'(\xi_1)| > M$ 或 $|f'(\xi_2)| > M$, 与已知矛盾, 假设不成立.

当 $c = 1$ 时, 此时 $|f(1)| = M$, 易知 $f'(1) = 0$.



设 $G(x) = f(x) - Mx, 0, x, 1$; 则有 $G'(x) = f'(x) - M, 0$, 从而 $G(x)$ 单调递减.

又 $G(0) = G(1) = 0$, 从而 $G(x) = 0$, 即 $f(x) = Mx, 0, x, 1$.

因此 $f'(1) = M$, 从而 $M = 0$.

综上所述, 最终 $M = 0$

(20)(本题满分 11 分) 二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2, a, b$. 求:

(I) a, b 的值;

(II) 正交矩阵 Q

【答案】 (I) $a = 4, b = 1$; (II) $Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

【解析】 (I) 记 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$, 故 $f = x^T A x, g = y^T B y$.

因为 $x = Qy$, 故 $f = y^T Q^T A Q y$, 所以 $B = Q^T A Q$, 其中 Q 为正交矩阵.

所以 A, B 相似, 故特征值相同, 故 $\begin{cases} tr(A) = tr(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$ 知, $\begin{cases} a + b = 5 \\ ab - 4 = 0 \end{cases}$, 故 $a = 4, b = 1$.

(II) 由 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 = 0, tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 5$, 知 A, B 的特征值均为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$.

解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E - A)x = 0$ 及 $(\lambda_2 E - B)x = 0$, 求特征向量并直接单位化,

对 $\lambda_1 = 5$, 由 $5E - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知, $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

对 $\lambda_2 = 0$, 由 $0E - A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

同理, B 的属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的特征向量为 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,



B 的属于特征值 $\lambda_2 = 0$ 的特征向量为 $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

记 $Q_1 = (\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = (\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, 就有

$$Q_1^T A Q_1 = Q_2^T B Q_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $B = Q_2 Q_1^T A Q_1 Q_2^T$, 只需令

$$Q = Q_1 Q_2^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

则 $B = Q^T A Q$, 二次型 $f(x_1, x_2)$ 经正交变换 $x = Qy$ 化为 $g(y_1, y_2)$.

(21)(本题满分 11 分)

设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明矩阵 P 可逆;

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = \theta$, 求 $P^{-1}AP$ 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【解析】(I) 设 $k_1\alpha + k_2A\alpha = \theta$

① 若 $k_2 = 0$, 则由 $\alpha \neq \theta$ 知 $k_1 = 0$;

② 若 $k_2 \neq 0$, 则 $A\alpha = -\frac{k_1}{k_2}\alpha$, 所以 α 是 A 的属于特征值 $-\frac{k_1}{k_2}$ 的特征向量, 与已知条件产生矛盾.

所以, $k_1 = k_2 = 0$, 向量组 $\alpha, A\alpha$ 线性无关, 故矩阵 P 可逆.

(II) 因为 $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$, 所以,

$$(A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

记 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 因此,



$$A(\alpha, A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

即 $AP = PB$, 由 P 可逆知 A, B 相似且 $P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

由 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3) = 0$ 知, 矩阵 A, B 的特征值均为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$,

因为特征值互不相同, 故矩阵 A 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(22)(本题满分 11 分)

二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 且

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0 \\ 0, & X - Y \leq 0 \end{cases}, Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0 \\ 0, & X + Y \leq 0 \end{cases}$$

求 (1) 二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布; (2) 求 Z_1, Z_2 的相关系数.

【解析】

(1) 由题意 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$, 所以可计算

$$P(Z_1 = 0, Z_2 = 0) = P(X - Y \leq 0, X + Y \leq 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z_1 = 0, Z_2 = 1) = P(X - Y \leq 0, X + Y > 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(Z_1 = 1, Z_2 = 0) = P(X - Y > 0, X + Y \leq 0) = 0$$

$$P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(X - Y > 0, X + Y > 0) = \frac{1}{4}$$

可得

	Z_2	0	1
Z_1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	1	0	$\frac{1}{4}$



1	0	$\frac{1}{4}$
---	---	---------------

(2) 由 (1) 可计算 $E(Z_1) = \frac{1}{4}, E(Z_2) = \frac{3}{4}, D(Z_1) = \frac{3}{16}, D(Z_2) = \frac{3}{16}, E(Z_1 Z_2) = \frac{1}{4}$

$$\text{所以可得 } \rho = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{DZ_1} \sqrt{DZ_2}} = \frac{E(Z_1 Z_2) - EZ_1 \cdot EZ_2}{\sqrt{DZ_1} \sqrt{DZ_2}} = \frac{1}{3}$$

(23)(本题满分 11 分)

设某元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \text{ 其中 } \theta, m \text{ 为参数且均大于零.}$$

(1) 计算概率 $P\{T > t\}$ 与 $P(T > s+t | T > s)$;

(2) 任取 n 个元件试验, 其寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n , 若 m 已知, 求 θ 得最大似然估计 $\hat{\theta}$.

【解析】

$$(1) P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$$

$$P(T > s+t | T > s) = \frac{P(T > s+t)}{P(T > s)} = \frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}$$

(2) 由题意可得概率密度函数为 $f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{m t^{m-1}}{\theta^m} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

$$\text{似然函数 } L(\theta) = \frac{m^n \prod_{i=1}^n t_i^{m-1}}{\theta^{mn}} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m}, t_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{取对数有 } \ln L(\theta) = n \ln m + (m-1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - mn \ln \theta - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m$$

$$\text{求导并令导数等于零, } \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = -\frac{mn}{\theta} + \frac{m}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m = 0$$

$$\text{解得 } \hat{\theta} = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}$$