理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2\}, B=\{(x,y)\mid y=x+2\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数是

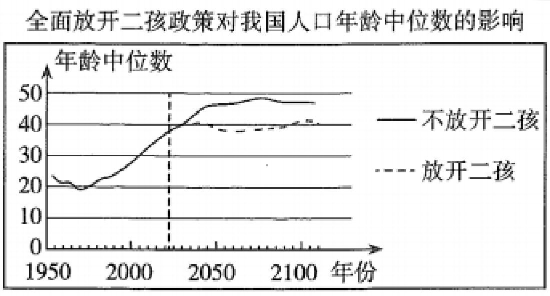
$A.\ 0$　　$B.\ 1$　　$C.\ 2$　　$D.\ 3$

答案：C

考点：集合的运算.

解析：作图可知两曲线有两个交点，故选 C.

2. 国际上通常用年龄中位数指标作为划分国家或地区人口构成类型的标准：年龄中位数在 20 岁以下为年轻型人口；年龄中位数在 20～30 岁为成年型人口；年龄中位数在 30 岁以上为老年型人口.



上图反映了我国全面放开二孩政策对我国人口年龄中位数的影响. 据此，对我国人口年龄构成的类型做出如下判断：

①建国以来直至 2000 年为成年型人口；②从 2010 年至 2020 年为老年型人口；③放开二孩政策之后我国仍为老年人型人口. 其中正确的是

$A.$ ②③　　$B.$ ①③　　$C.$ ②　　$D.$ ①②

答案：A

考点：统计中对中位数的考查

解析：根据题目中条件可以判断②③是正确的，①是错误的.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-3, x<1,\\ \ln x, x\ge 1,\end{cases}$ 则关于函数 $f(x)$ 的说法不正确的是

A. 定义域为 R　　*B.* 值域为 $(-3,+\infty)$　　*C.* 在 R 上为增函数　　*D.* 只有一个零点

答案：B

考点：分段函数性质的考查.

解析：如图，由于分段函数 $f(x)$ 的值域为 $(-3,\mathrm{e}-3)\cup[0,+\infty)$，因此选 B.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(3,-1),\overrightarrow{BD}=(2,m),\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，则该四边形的面积是

A. $\sqrt{10}$　　*B.* $2\sqrt{5}$　　*C.* 10　　*D.* 20

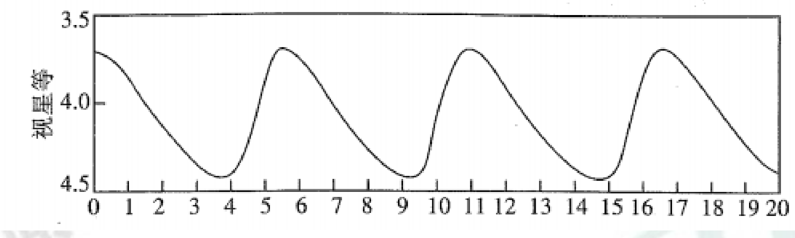
答案：C

考点：平面向量的性质，数量积的运算.

解析：因为 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}=3\times 2+(-1)m=0$，即 $m=6$，所以四边形的面积为

$\dfrac{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}{2}=\dfrac{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2}}{2}=10$，故选 C.

5. 天上有些恒星的亮度是会变化的，其中一种称为造父（型）变星，本身体积会膨胀收缩造成亮度周期性的变化. 第一颗被描述的经典造父变星是在1784年.



上图为一造父变星的亮度随时间的周期变化图，其中视星等的数值越小，亮度越高，则此变星变化的周期、最亮时视星等，分别约是

A. 5.5,3.7　　*B.* 5.4,4.4　　*C.* 6.5,3.7　　*D.* 5.5,4.4

答案：A

考点：表图的观察理解

解析：根据图像中相邻最高点与最低点的位置，可以估计周期约为5.5．视星等数值越小亮度越高，故最亮时约为3.7．

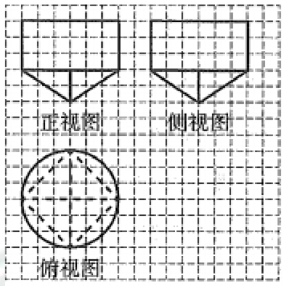
6. 双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$与$C_2:\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率之积为$4$，则$C_1$的渐近线方程是

$A.\ y=\pm x$　　$B.\ y=\pm 2x$　　$C.\ y=\pm\left(2+\sqrt{3}\right)x$　　$D.\ y=\pm\left(2-\sqrt{3}\right)x$

答案：D

考点：考查双曲线的性质，渐近线方程，离心率.

解析：由已知$\dfrac{c}{a}\times\dfrac{c}{b}=4$，即$c^2=4ab,\therefore a^2+b^2=4ab,\therefore\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=4$．变形得$\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-4\times\dfrac{b}{a}+1=0,$ $\because a>b>0$，故$\dfrac{b}{a}=2-\sqrt{3}$，$\therefore$双曲线C_1的渐近线方程为$y=\pm\left(2-\sqrt{3}\right)x$．



（第7题图）

7. 某几何体的三视图如图所示，已知网格纸中小正方形的边长为1，则此几何体的体积是

$A.\ 27\pi+9$

$B.\ 27\pi+12$

$C.\ 33\pi$

$D.\ 18\pi+9$

答案：B

考点：三视图与几何体计算体积的考查.

解析：由三视图可知，几何体是由一个底面半径为3，高为3的圆柱体和一个底面边长为$3\sqrt{2}$，高为2的正四棱锥组合而成，圆柱体的体积为27π，正四棱锥的体积为12，所以几何体的体积为$27\pi+12$．

8. 已知$Rt\Delta ABC$中，$\angle A=90^\circ$，角A,B,C的对边分别为a,b,c，其内切圆半径为r，由$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc$，又$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr$，可得$r=\dfrac{bc}{a+b+c}$．类比上述方法可得：三棱锥$P-ABC$中，若

$\angle BAC=90^\circ, PA\perp$ 平面ABC，设 ΔABC 的面积为 $S_1,\Delta PAB$ 的面积为 S_2， ΔPAC 的面积为 S_3，

ΔPBC 的面积为 S_4，则该三棱锥内切球的半径是

A. $\dfrac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3+S_4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3+S_4}$

C. $\dfrac{\sqrt{3S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3+S_4}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3+S_4}$

答案：B

考点：类比与推理.

解析：设 $PA=a, AB=b, AC=c$，则

$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PA=\dfrac{1}{6}abc$， 又 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_1R+\dfrac{1}{3}S_2R+\dfrac{1}{3}S_3R+\dfrac{1}{3}S_4R$，

$\therefore R=\dfrac{3V_{P-ABC}}{S_1+S_2+S_3+S_4}=\dfrac{\frac{1}{2}abc}{S_1+S_2+S_3+S_4}$.

又$\because S_1=\dfrac{1}{2}bc, S_2=\dfrac{1}{2}ab, S_3=\dfrac{1}{2}ac.\therefore S_1S_2S_3=\dfrac{1}{8}a^2b^2c^2$.

$\therefore \dfrac{1}{2}abc=\sqrt{2S_1S_2S_3}, \therefore R=\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3+S_4}$.

9. $\left(x^3-2x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中，常数项是

A. 220　　B. -220　　C. 924　　D. -924

答案：B

考点：二项式定理的考查.

解析：$\left(x^3-2x+\dfrac{1}{x}\right)^6=\left(\dfrac{x^4-2x^2+1}{x}\right)^6=\dfrac{\left(x^2-1\right)^{12}}{x^6}$，即求分子展开式中 x^6 项的系数. 分子二项展开式的通项为 $C_{12}^r\left(x^2\right)^{12-r}(-1)^r$，令 $24-2r=6$，解得 $r=9$，此时 $C_{12}^9\left(x^2\right)^{12-9}(-1)^9=-220x^6$，故原式展开后，常数项为 -220 .

10. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x$，若 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-3$，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值是

$A.\ \dfrac{\pi}{6}$　　$B.\ \dfrac{\pi}{4}$　　$C.\ \dfrac{\pi}{3}$　　$D.\ \dfrac{2\pi}{3}$

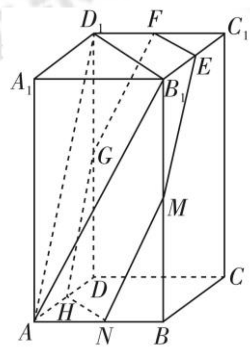
答案：A

考点：三角函数的最值问题 .

解析：$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，所以函数 $f(x)$ 的最大值为 3，最小值为 -1，

又因为 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-3$，所以 $f(x)$ 在 x_1,x_2 处取到最大值和最小值，不妨设在 x_1 处有最大值，

则 $x_1=k_1\pi+\dfrac{\pi}{3}$，$x_2$ 处取到最小值，则 $x_2=k_2\pi-\dfrac{\pi}{6}$，得 $|x_1+x_2|=\left|(k_1+k_2)\pi+\dfrac{\pi}{6}\right|,k_1,k_2\in Z$，所以 $|x_1+x_2|$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$.



11.已知长方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，　$AB=AD=2,\ AA_1=4,\ M$ 是 BB_1 的中点，点 P 在长方体内部或表面上,且 $MP//$ 平面 AB_1D_1，则动点 P 轨迹所形成的区域面积是（）

A.6　　B. $4\sqrt{2}$　C. $4\sqrt{6}$　　D.9

答案：D

考点：点线面位置关系

解析：　E,F,G,H,N 分别为 B_1C_1,D_1C_1,D_1D,DA,AB 中点，由题知 $EF//NH//B_1D_1$，$MN//FG//B_1A$,所以 平面$MEFGHN//$平面AB_1D_1 ,所以点 P 轨迹是六边形 $MEFGHN$ 及其内部，

所以 E 到 GM 距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以区域面积 $S=2S_{EFGM}=9$

12.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{5}{6}$，且 $a_{n+1}=\dfrac{(5n+10)a_n}{(n^2+5n+6)a_n+5n+15}(n\in N^*)$，则数列 $a_{99}=$（ ）

A. $\dfrac{1}{2019}$　　B. $\dfrac{2018}{2019}$　C. $\dfrac{1}{2020}$　　D. $\dfrac{2019}{2020}$

答案：C

考点：构造法求数列通项

解析：$a_{n+1}=\dfrac{(5n+10)a_n}{(n^2+5n+6)a_n+5n+15}=\dfrac{5(n+2)a_n}{(n+3)\left[(n+2)a_n+5\ \right]}$

则 $(n+3)a_{n+1}=\dfrac{5(n+2)a_n}{\left[(n+2)a_n+5\ \right]}$

令 $b_n=(n+2)a_n$，则 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{b_n}$

所以 $\frac{1}{b_n}=\frac{n+1}{5}$，所以 $a_n=\frac{5}{(n+1)(n+2)}$，所以 $a_{99}=\frac{1}{2020}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知复数 $z=\frac{2+i}{i^3}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$__________

答案：$\sqrt{5}$

考点：复数的四则运算与模长

解析：$z=\frac{2+i}{i^3}=\frac{2+i}{-i}=-1+2i,|z|=\sqrt{5}$

14.等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=18$，$a_{20}=30$，则满足不等式 $a_n>n$ 的正整数 n 的最大值是________

答案：59

考点：等差数列的通项求解

解析：由 $\begin{cases}a_4=a_1+3d=18\\ a_{20}=a_1+19d=30\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1=\frac{63}{4}\\ d=\frac{3}{4}\end{cases}$，

$\therefore a_n=\frac{60+3n}{4}>n$，解得 $n<60$，故正整数 n 的最大值是 59

15.设 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点，A,B 分别为 C 上第二、四象限的点，若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则该矩形的面积是________，AB 所在直线的方程是__________

答案：$2;y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x$

考点：椭圆的基本性质

解析：由已知得 $|AF_1|+|AF_2|=2a,|AF_1|^2+|AF_2|^2=4c^2$,

整理得 $|AF_1|\cdot|AF_2|=2$，则矩形 AF_1BF_2 的面积为 $S=|AF_1|\cdot|AF_2|=2$，

矩形 AF_1BF_2 的外接圆方程为 $x^2+y^2=3$, 与椭圆 C 的方程联立得 $A(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，

又 AB 过坐标原点，$\therefore AB$ 的斜率为 $k_{AB}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore AB$ 所在直线的方程是 $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x$

16.已知函数 $f(x)=a^{-x}+\log_a x$（其中 $a>0$ 且 $a\neq1$）有零点，则实数 a 的最小值是__________

答案：$e^{-\frac{1}{e}}$

考点：函数的零点

解析：由 $f(x)$ 存在零点，即函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象有公共点，

当 $a>1$ 时，两图象显然有公共点；

当 $0<a<1$ 时，由图可知，a 最小时，两图象均与直线 $y=x$ 相切，此时，设切点坐标为 (x_0,y_0)，

则 $\begin{cases} y_0=(\frac{1}{a})^{x_0} \\ y_0=x_0 \\ (\frac{1}{a})^{x_0}\ln\frac{1}{a}=1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x_0=(\frac{1}{a})^{x_0} \\ (\frac{1}{a})^{x_0}\ln\frac{1}{a}=1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x_0=(\frac{1}{a})^{x_0} \\ x_0\ln\frac{1}{a}=1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} \ln x_0=x_0\ln\frac{1}{a} \\ x_0\ln\frac{1}{a}=1 \end{cases}$

$\therefore \ln x_0=1, x_0=e, \therefore \ln\frac{1}{a}=\frac{1}{e}, \therefore a=e^{-\frac{1}{e}}$

三，解答题：共 70 分。解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,且 $a\cos B(\tan A+\tan B)=\sqrt{3}c$

(1)求 A；

(2)若 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$,求 a 的最小值.

答案：（1） $A=\frac{\pi}{3}$；（2） 2.

考点： ΔABC 正余弦定理，基本不等式。

解析：(1)由已知得 $a\cos B(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B})=\sqrt{3}c.$

$\therefore a(\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A})=\sqrt{3}c,$

$\therefore a\frac{\sin(A+B)}{\cos A}=\sqrt{3}c.$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin A\frac{\sin C}{\cos A}=\sqrt{3}\sin C$.

又因为 $\sin C\neq 0,\therefore \tan A=\sqrt{3},\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ....(6 分)

(2)由 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，得 $bc=4$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geq 2bc-bc=bc=4$,

当且仅当 $b=c$ 时，取得等号，

所以 a 的最小值为 2 . ...(12 分)

18.(12 分)

如图1，已知等边 ΔABC 的边长为 3，点 M,N 分别是 AB,AC 上的点，且 $BM=2MA,AN=2NC$，如图2，将 ΔAMN 沿 MN 折起到 $\Delta A'MN$ 的位置.

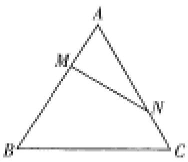


图1

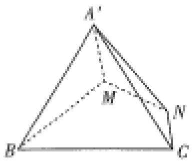


图2

(1)求证：平面 $A'BM\perp$ 平面 $BCNM$；

(2)给出三个条件：① $A'M\perp BC$；②二面角 $A'-MN-C$ 大小为 $60°$；③ $A'B=\sqrt{7}$.在这三个条件中任选一个，补充在下面问题的条件中，并作答：

在线段 BC 上是否存在一点 P，使直线 PA' 与平面 $A'BM$ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$，若存在，求出 PB 的长，若不存在，请说明理由.（注：如果多个条件分别作答，按第一个解答给分.）

答案：(1)见解析(2)见解析

考点：(1)面面垂直证明;(2)线面角、二面角的求法.

解析：(1)证明：由已知得 $AM=1,AN=2,\angle A=60°$,

$\therefore MN\perp AB,\therefore MN\perp A'M,MN\perp MB$.

又$\because MB\cap A'M=M,\therefore MN\perp$平面$A'BM$．

$MN\subset$平面$BCNM$，$\therefore$平面$A'BM\perp$平面$BCNM$．

(2)(i)若用条件①，由（1）得$A'M\perp MN$，BC和MN是两条相交直线，

$\therefore A'M\perp$平面$BCNM$．

以M为原点，MB,MN,MA'分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系.

则$A'(0,0,1)$，设$P(2-a,\sqrt{3}a,0)$，其中$0<a\le\frac{3}{2}$，则$\overrightarrow{A'P}=(2-a,\sqrt{3}a,-1)$．

平面$A'BM$的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$．

设直线PA'与平面$A'BM$所成的角为θ，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A'P},\vec{n}\rangle|=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{(2-a)^2+3a^2+1}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

解得$a=\frac{6\pm\sqrt{6}}{2}>\frac{3}{2}$，所以不存在$P$满足条件.

(ii)若用条件②，由（1）得$\angle A'MB$就是二面角$A'-MN-C$的平面角，$\therefore\angle A'MB=60^\circ$．

过A'作$A'O\perp BM$，垂足为O，则$A'O\perp$平面$BCNM$．在平面$BCNM$中，作$OD\perp OB$，点D在BM右侧.

以O为原点，OB,OD,OA'分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系.

则$A'(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，设$P(\frac{3}{2}-a,\sqrt{3}a,0)$，其中$0<a\le\frac{3}{2}$，则$\overrightarrow{A'P}=(\frac{3}{2}-a,\sqrt{3}a,-\frac{\sqrt{3}}{2})$．

平面$A'BM$的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$．

设直线PA'与平面$A'BM$所成的角为θ，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A'P},\vec{n}\rangle|=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{(\frac{3}{2}-a)^2+3a^2+\frac{3}{4}}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

解得$a=\frac{3}{2}$或$a=3$（舍去），所以存在点P满足条件，这时$PB=3$．

(iii)若用条件③，在$\Delta A'BM$中，由余弦定理得$\angle A'MB=120^\circ$．

过A'作$A'O\perp BM$，垂足为O，则$A'O\perp$平面$BCNM$．

以O为原点，OB,OD,OA'分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系.

则 $A'(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，设 $P(\frac{5}{2}-a,\sqrt{3}a,0)$，其中 $0<a\le\frac{3}{2}$，则 $\overrightarrow{A'P}=(\frac{5}{2}-a,\sqrt{3}a,-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

平面 $A'BM$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$.

设直线 PA' 与平面 $A'BM$ 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A'P},\vec{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{(\frac{5}{2}-a)^2+3a^2+\frac{3}{4}}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

$2a^2-15a+21=0$.解得 $a=\dfrac{15\pm\sqrt{57}}{4}>\dfrac{3}{2}$,所以不存在点 P 满足条件.

19.（12 分）

已知抛物线 $C:y^2=4x$.

(1) 若 x 轴上的点 A 关于直线 $y=x-1$ 的对称点在 C 上，求 A 点的坐标；

(2) 设过 C 的焦点 F 的直线 l 与 C 交于 P,Q 两点，PQ 的延长线与 y 轴交于 M，O 为坐标原点，

若 ΔPOQ 的面积等于 ΔMOQ 面积的 3 倍，求直线 l 的方程.

答案：（1）$\therefore A(-1,0)$ 或 $A(3,0)$

（2）$2\sqrt{2}x-y-2\sqrt{2}=0$ 或 $2\sqrt{2}x+y-2\sqrt{2}=0$

考点：点与线对称问题；圆锥曲线面积问题

解析：（1）设点 $A(a,0)$ 关于直线 $y=x-1$ 的对称点的对称点为 $A'(x',y')$，

则 $\begin{cases}\dfrac{y'}{x'-a}=-1,\\ \dfrac{y'}{2}=\dfrac{a+x'}{2}-1,\end{cases}$，解得 $x'=1,y'=a-1$

$A'(1,a-1)$

把 A' 点坐标代入 $y^2=4x$ 得 $(a-1)^2=4$，$\therefore a=-1$ 或 $a=3$.

$\therefore A(-1,0)$ 或 $A(3,0)$

（2）设 $M(0,y_0)(y_0>0),Q(x_1,y_1),P(x_2,y_2),O$ 到直线 l 的距离为 d.

则 $S_{\triangle MOQ}=\frac{1}{2}|MQ|d,S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|d$.

由 $S_{\triangle OPQ}=3S_{\triangle MOQ},|PQ|=3|MQ|,\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{QM},x_2=4x_1$ ①

由已知直线l的斜率存在，且不为零，

设$l: y=k(x-1)$,代入$y^2=4x$，得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\therefore x_1+x_2=2+\dfrac{4}{k^2}$②，$x_1x_2=1$③

由①③得$\therefore x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=2$代入②得$k^2=8$.

所以，$k=\pm 2\sqrt{2}$

所以，直线的方程为$2\sqrt{2}x-y-2\sqrt{2}=0$或$2\sqrt{2}x+y-2\sqrt{2}=0$.

20.（12 分）

设函数$f(x)=ax^2-a-\ln x-\dfrac{1}{x}$，其中$a\in R$

（1） 若$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，求a取值范围；

（2） 当$a\ge\dfrac{1}{2}, x\in(1,+\infty)$时，求证$f(x)+e^{1-x}>0$

答案：（1）$[\dfrac{2}{27},+\infty)$（2）见解析

考点：利用单调性求参数范围；导数的放缩

解析：（1）因为$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数

所以$f'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2ax^3-x+1}{x}\ge 0$恒成立，即$2a\ge-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$恒成立

令$g(t)=t^2-t^3(t<0)$，则$g'(t)=2t-3t^2(t<0)$，$g'(t)=0,t=\dfrac{2}{3}$

当$t\in(0,\dfrac{2}{3})$时，$g'(t)>0$，$g(t)$为增函数；

当$t\in(\dfrac{2}{3},+\infty)$时，$g'(t)<0$，$g(t)$为减函数；

$g(t)_{\max}=g(\dfrac{2}{3})=\dfrac{4}{27}$，所以$a\in[\dfrac{2}{27},+\infty)$

（2）当$a\ge\dfrac{1}{2}$时，$F(x)=f(x)+e^{1-x}=ax^2-a-\ln x-\dfrac{1}{x}+e^{1-x}(x>1)$

$F'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-e^{1-x}\ge x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-e^{1-x}$

令 $h(x)=e^{x-1}-x,h'(x)=e^{x-1}-1$

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 为增函数；

当 $x\in(-\infty,1)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 为减函数；

所以 $h(x)\geq h(1)=0$，即 $e^{x-1}\geq x$

$$F'(x)=2ax\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-e^{1-x}\geq x\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-e^{1-x}\geq x\ -\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^3-2x+1}{x^2}\geq\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}=0$$

所以 $F(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 是增函数， $F(1)=0$，$f(x)+e^{1-x}>0$

21.现有甲，乙两种不透明充气包装的袋装零食，每袋零食甲随机附赠玩具 M_1,M_2,M_3 中的一个，每袋零食乙从玩具 N_1,N_2 中随机附赠一个.记事件 A_n ：一次性购买 n 袋零食甲后集齐玩具 M_1,M_2,M_3；事件 B_n：一次性购买 n 袋零食乙后集齐玩具 N_1,N_2.

（1）求概率 $P(A_4),P(A_5)$ 及 $P(B_4)$；

（2）已知 $P(A_n)=aP(A_{n-1})+b^{n-1}P(B_{n-1})$，其中 a,b 为常数，求 $P(A_n)$.

答案：(1)　$P(A_4)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$，$P(A_5)=\frac{60+90}{243}=\frac{50}{81}$，$P(B_4)=1-\frac{2}{16}=\frac{7}{8}$

(2)　$P(A_n)=a_n=1+(\frac{1}{3})^{n-1}-2(\frac{2}{3})^{n-1}\ (n\in N^*)$.

考点：随机变量分布

解析：(1) 一次性购买 4 袋零食甲获得玩具的情况共有 3^4=81 种不同的可能，其中能够集齐三种玩具的充要条件是 M_1,M_2,M_3 三个玩具中，某个玩具出现两次，其余玩具出现一次，对应的可能性为 $C_3^1C_4^2A_2^2=36$，故 $P(A_4)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$，

一次性购买 5 袋零食甲获得玩具的情况共有 3^5=243 种不同的可能，其中能够集齐三种玩具的充要条件是 M_1,M_2,M_3 三个玩具中，某个玩具出现三次，其余玩具出现一次或某两个玩具各出现两次，另一个玩具出现一次，对应的可能性分别为 $C_3^1C_5^3A_2^2=60$，$C_3^2C_5^2C_3^2=90$，故

$$P(A_5)=\frac{60+90}{243}=\frac{50}{81},$$

一次性购买 4 袋零食乙获得玩具的情况共有 $2^4=16$ 种不同的可能，

其中不能集齐两种玩具的情况只有 2 种，即全是 N_1，全是 N_2，

故 $P(B_4)=1-\frac{2}{16}=\frac{7}{8}$ ……………………………………………………………………6 分

（2）记 $a_n=P(A_n), b_n=P(B_n)$ 根据题意及（1）的计算，不难整理得下表：

n	1	2	3	4	5
$a_n=P(A_n)$	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{50}{81}$
$b_n=P(B_n)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	…

由于 B_n 的对立事件总是 2 种情形（即全是 N_1，全是 N_2），容易得到 $b_n=1-\frac{2}{2^n}=1-(\frac{1}{2})^{n-1}$.

为解出待定系数 a,b

令 $\begin{cases} a_3=a\cdot a_2+b^2\cdot b_2 \\ a_4=a\cdot a_3+b^3\cdot b_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{2}{9}=a\times 0+\frac{1}{2}b^2 \\ \frac{4}{9}=\frac{2}{9}a+\frac{3}{4}b^3 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{2}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=3 \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases}$ （舍去，因为 $a_5\neq 3a_4+(-\frac{2}{3})^4 b_4$ ）.

故 $a_n=a_{n-1}+(\frac{2}{3})^{n-1}b_{n-1}$

即 $a_n-a_{n-1}=(\frac{2}{3})^{n-1}-2(\frac{1}{3})^{n-1}$.

同理 $a_{n-1}-a_{n-2}=(\frac{2}{3})^{n-2}-2(\frac{1}{3})^{n-2}$.

……

$a_2-a_1=\frac{2}{3}-2\times\frac{1}{3}$.

累加可得 $P(A_n)=a_n=1+(\frac{1}{3})^{n-1}-2(\frac{2}{3})^{n-1}\ (n\geq 2)$.

当 $n=1$ 时, $a_1=0$ 适合上式,

$\therefore P(A_n)=a_n=1+(\frac{1}{3})^{n-1}-2(\frac{2}{3})^{n-1}\ (n\in N^*)$. ……………………………………………………12 分

（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分，作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑

22[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在极坐标系 Ox 中，直线 l 过点 $A(3,0)$ 与点 $B\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$

（1） 求直线 l 的极坐标方程；

(2) 已知圆 $C:\rho=\cos\theta$.若曲线 $\theta=0$ 与 l , C 相交于 A,E 两点;曲线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 于 l , C 相交于 M,N 两点, E,N 异于极点 O ，求证： $NE \parallel AM$

答案： (1) $\rho=\dfrac{3}{2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}$ (2)见解析

考点：极坐标与参数方程的应用

解析：（1）设 $P(\rho,\theta)$ 为 AB 延长线上任意一点，则

$S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBP}=S_{\triangle OAP}$,即 $\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\rho\times\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\times3\rho\times\sin\theta$ ，

化简得 $3=\sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta$ ，即直线 l 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{3}{2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

(2) 把 $\theta=0$ 代入 $\rho=\cos\theta$ 得 $|OE|=1$ ，由题意知 $|OA|=3$ ，把 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入 $\rho=\cos\theta$ 得 $|ON|=\dfrac{1}{2}$ ，

把 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入 $\rho=\dfrac{3}{2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}$ 得 $|OM|=\dfrac{3}{2}$ ， $\therefore\dfrac{|OE|}{|OA|}=\dfrac{|ON|}{|OM|}=\dfrac{1}{3}$,$\therefore NE \parallel AM$

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-3|+|x-a|$ ，当 $x\le3$ 时 $f(x)$ 的最小值是 2 .

(1)求 a；

(2)若 $m+2n=a$，求证：$5(m^2+n^2)\geq 1$.

答案：(1) $a=1$ 或 $a=5$；(2) 见解析

考点：绝对值不等式；柯西不等式.

解析：因为 $x\leq 3$，所以 $x-3\leq 0$，所以 $f(x)=|x-3|+|x-a|=3-x+|x-a|$.

(1)当 $a\leq 3$ 时，$f(x)=\begin{cases}-2x+a+3, x\leq a,\\ 3-a, a<x<3.\end{cases}$

所以 $f(x)_{\min}=f(a)=3-a$ ....2 分

由 $3-a=2$，得 $a=1$ ....3 分

当 $a>3$ 时，因为 $x\leq 3$，所以 $x-a<0$，$f(x)=-2x+3+a$.

所以 $f(x)_{\min}=f(3)=-3+a$.

由 $-3+a=2$，得 $a=5$.

综上 $a=1$ 或 $a=5$ ....5 分

(2)证明：当 $a=1$ 时，$m+2n=1$.

所以 $5(m^2+n^2)=(1^2+2^2)(m^2+n^2)\geq(m+2n)^2=1$ ....7 分

当 $a=5$ 时，$m+2n=5$.

所以 $5(m^2+n^2)=(1^2+2^2)(m^2+n^2)\geq(m+2n)^2=25\geq 1$.

综上，得证. ....10 分