

山西中考数学模拟百校联考试卷 (一)

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合要求, 请选出并在答题卡上将该选项涂黑)

1. 在 -2 , -5 , 0 , 2 这四个数中, 最小的数是

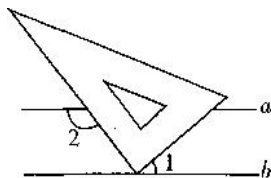
- A. -2 B. -5 C. 0 D. 2

【答案】 B

【考点】 实数的比较

2. 如图, 已知直线 $a \parallel b$, 把三角形的直角顶点放在直线 b 上, 若 $\angle 1 = 40^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为

- A. 100° B. 110° C. 120° D. 130°



第 2 题图

【答案】 D

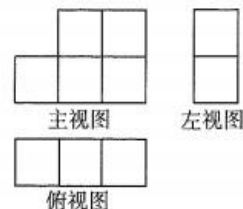
【考点】 平行的性质

3. 一个几何体由多个完全相同的小正方体组成, 它的三视图如图所示, 那么组成这个几何体的小正方体的个数为

- A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

【答案】 A

【考点】 三视图的应用



第 3 题图

4. 下列计算正确的是

A. $(-3)^0 = -1$

B. $(-2\sqrt{3})^2 = 12$

C. $\sqrt{(-3)^2} = -3$

D. $-3^2 = -6$

【答案】 B

【考点】 整式的乘除

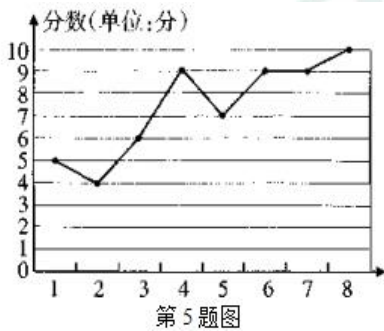
5. 在某次信息技术能力测试中, “人工智能社团” 的八名同学的成绩统计如图所示, 由统计图可知, 这组数据的中位数为

A. 6 分

B. 7 分

C. 8 分

D. 9 分



【答案】 C

【考点】 中位数

6. 某阶梯教室从第 2 排起, 每一排都比前一排增加相同数目的座位. 已知第 5 排有 36 个座位, 第 15 排有 56 个座位. 若设第一排有 m 个座位, 每一排比前一排多 n 个座位则可以列方程组为

A.
$$\begin{cases} m + 5n = 36 \\ m + 15n = 56. \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 5m + n = 36 \\ 15m + n = 56. \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} m + 4n = 36 \\ m + 14n = 56. \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 4m + n = 36 \\ 14m + n = 56. \end{cases}$$

【答案】 C

【考点】 二元一次方程组的应用

7. 用配方法解一元二次方程 $3x^2 - 6x - 5 = 0$ 时, 下列变形正确的是

- A. $(X-1)^2 = \frac{8}{3}$ B. $(X-1)^2 = \frac{2}{3}$ C. $(X-1)^2 = 8$ D. $(X-1)^2 = 6$

【答案】 A

【考点】 一元二次方程的配方法

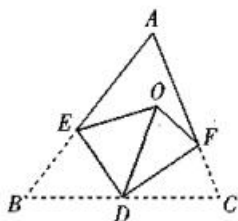
8 化简 $\left(\frac{2a}{5a^2b} + \frac{3b}{10ab^2}\right) \div \frac{7}{2a^3b^2}$ 的结果为

- A. $\frac{a^2b}{5}$ B. $\frac{a^2b}{7}$ C. $\frac{ab}{5}$ D. $\frac{ab}{7}$

【答案】 A

【考点】 分式的化简

9. 如图, 已知点 D, E, F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边上, 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, DF 翻折, 顶点 B, C 均落在 $\triangle ABC$ 内的点 O 处, 且 BD 与 CD 重合于线段 OD, 若 $\angle AEO + \angle AFO = 58^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数为



第9题图

- A. 58° B. 59° C. 60° D. 61°

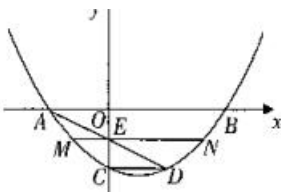
【答案】 D

【考点】 三角形的外角, 三角形的内角和定理

【解析】 由翻折可得 $\angle BED = \angle OED$, $\angle BDE = \angle ODE$, $\angle OFD = \angle CFD$, $\angle CDF = \angle ODF$

$\therefore \angle AEO + \angle OED + \angle DEB = 180^\circ$
 $\angle AFO + \angle OFD + \angle DFC = 180^\circ$
 $\therefore \angle AEO + \angle OED + \angle DEB + \angle AFO + \angle OFD + \angle DFC = 360^\circ$
 $\therefore \angle AEO + \angle AFO = 58^\circ$
 $\therefore 2\angle DEB + 2\angle DFC = 302^\circ$
 $\therefore \angle DEB + \angle DFC = 151^\circ$
 $\therefore \angle ODF = \angle CDF, \angle BDE = \angle ODE$
 $\angle BDE + \angle ODE + \angle CDF + \angle ODF = 180^\circ$
 $\therefore 2\angle BDE + 2\angle CDF = 180^\circ$
 $\therefore \angle BDE + \angle CDF = 90^\circ$
 \therefore 在 $\triangle BED, \triangle CDF$ 中
 $\angle BDE + \angle B + \angle DEB + \angle DFC + \angle CDF + \angle C = 360^\circ$
 $\therefore \angle B + \angle C = 119^\circ$
 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
 $\therefore \angle A = 61^\circ$

10. 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴相较于 A, B 两点, 与 y 轴相较于点 C , 点 D 在抛物线上, 且 $CD \parallel AB$, AD 与 y 轴相较于点 E , 过点 E 的直线 MN 平行于 x 轴, 与抛物线相较于 M, N 两点, 则线段 MN 的长度为



第 10 题图

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{5}$

【答案】 D

【考点】 判断轴对称和中心对称图形

【解析】

在 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ 中, 令 $x = 0$, 则 $y = -2 \therefore C(0, -2)$

令 $y = 0$, 则 $x = -2$ 或 $4 \therefore A(-2, 0)B(4, 0)$

$\therefore CD \parallel AB$

\therefore 点 D 纵坐标与点 C 纵坐标相同为 -2

令 $y = -2$, 所以 $x = 0$ 或 $2 \therefore D(2, -2)$

设, 直线 AD 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

将 $A(-2, 0)D(2, -2)$ 代入得, $y = -\frac{1}{2}x - 1$

令 $x = 0$, 则 $y = -1 \therefore E(0, -1)$

$\therefore MN \parallel AB$

\therefore 点 M, N 纵坐标与点 E 纵坐标相同为 -1

当 $y = -1$ 时, $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

$\therefore MN = 1 + \sqrt{5} - (1 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 一个实数与 $\sqrt{5}$ 的积为负整数, 这个数可以是_____.

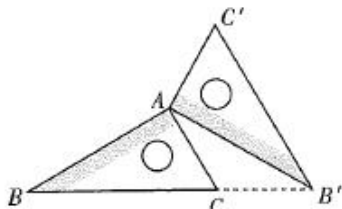
【答案】 答案不唯一, 例如 $-\sqrt{5}; -2\sqrt{5}$ 等

【考点】 实数及其运算

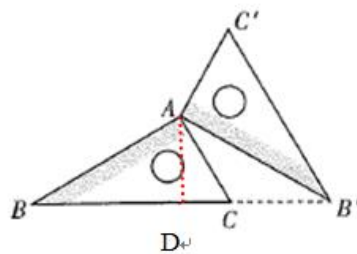
12. 如图, 在同一平面内, 将两个完全相同的直角三角尺按如图放置, 使直角顶点 A 重合,

点 B' 正好在 BC 的延长线上, $\angle BAC = \angle B'AC' = 90^\circ$, $\angle B = \angle AB'C' = 30^\circ$, $AC = AC' = 2$,

则 BB' 的长为_____.



第 12 题图



【答案】 6

【考点】 解直角三角形 (勾股定理、等面积法)

【解析】 $\because \angle BAC = \angle B'AC' = 90^\circ$, $\angle B = \angle AB'C' = 30^\circ$, $AC = AC' = 2$,

$\therefore BC = BC' = 4$ (直角三角形中, 30° 所对的直角边等于斜边的一半)

$\therefore AB = AB' = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ (勾股定理)

在 $\triangle ABC$ 中, $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{4} = \sqrt{3}$ (等面积法)

$\therefore BD = 3, CD = 1$

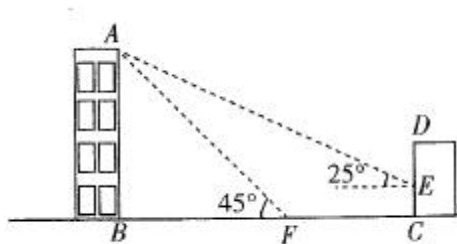
如图, 过 A 点作 $AD \perp BC$,

在 $Rt\triangle ADB'$ 中, $DB' = \sqrt{AB'^2 - AD^2} = 3$;

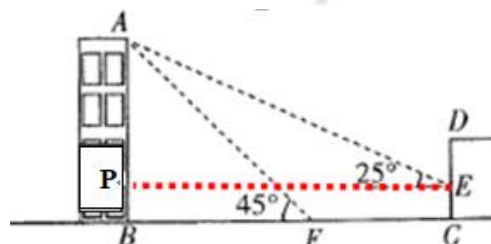
$\therefore BB' = BD + DB' = 3 + 3 = 6$

13. 如图, 学校教学楼 AB 的后面有一栋宿舍楼 CD, 当光线与地面的夹角是 25° 时, 教学楼在宿舍楼的墙上留下高 3m 的影子 CE, 而当光线与地面夹角是 45° 时, 教学楼顶 A 在地面上的影子 F 与墙角 C 有 20m 的距离 (B, F, C 在一条直线上). 则教学楼 AB 的高度为 _____ m.

(结果精确到 1m, 参考数据: $\sin 25^\circ \approx 0.42$, $\cos 25^\circ \approx 0.91$, $\tan 25^\circ \approx 0.47$)



第 13 题图



第 13 题图

【答案】 23

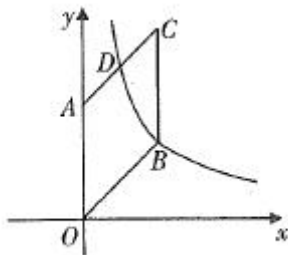
【考点】 利用三角函数测高

【解析】 如图, 过 E 作 $EP \perp AB$, 设 $AB = BF = x$, 则 $AP = x - 3$, $PE = BC = x + 20$

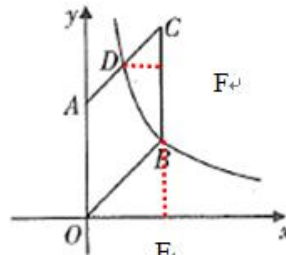
在直角三角形 APD 中, $\tan 25^\circ = AP:PE = x-3:x+20 \approx 0.47$

解之得: $x \approx 23\text{m}$

14.如图, 已知点 A 在 y 轴上, 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过平行四边形 AOBC 的顶点 B 和 AC 的中点 D, $\angle ACB = 45^\circ$, 则点 C 的坐标为_____.



第 14 题图



第 14 题图

【答案】 (2, 5)

【考点】 反比例函数

【解析】 过 B 作 $BE \perp x$ 轴 $\because \angle ACB = 45^\circ \therefore \angle AOB = \angle BOE = 45^\circ$

又 $\because B$ 在反比例函数上 $\therefore B(2, 2)$

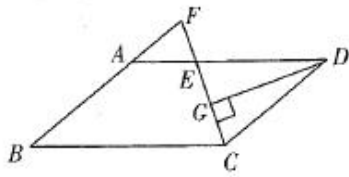
$\because D$ 是 AC 中点 $\therefore D$ 的横坐标为 1

又 $\because D$ 在反比例函数上 $\therefore D(1, 4)$

在 Rt 三角形 CDF 中, $CF = DF = 1$

$\therefore C$ 的横坐标为 2, 纵坐标为 $4+1=5 \therefore C(2, 5)$

15.如图, 在平行四边形 ABCD 中, $AB=6, BC=9, \angle BCD$ 的平分线交 AD 于点 E, 交 BA 的延长线于点 F, $DG \perp CF$ 于点 G, $DG = 4\sqrt{2}$, 则 $\triangle AFE$ 的周长为_____.



第 15 题图

【答案】 8

【考点】 勾股定理、平行四边形性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质

【解析】 \because 四边形 ABCD 是平行四边形 $\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC, \angle BFC = \angle DCF, \angle BCE = \angle DEC$
 $\because FC$ 平分 $\angle BCD \quad \angle BCE = \angle DCF \quad \therefore \triangle BCF、\triangle DEC$ 和 $\triangle AFE$ 都是等腰三角形。

又 $\because AB = 6, \therefore DC = DE = 6 \quad \because BC = 9, \therefore AD = 9, AE = AF = AD - DE = 9 - 6 = 3$

$\because DG \perp EC, DG = 4\sqrt{2}, \therefore CG = 2 \quad CE = 2CG = 4$

$\because AB \parallel CD \quad \therefore \triangle AFE$ 相似于 $\triangle DCE \quad \therefore \frac{AF}{DC} = \frac{EF}{EC} = \frac{3}{6} = \frac{EF}{4}, \therefore EF = 2$

$\therefore \triangle AFE$ 的周长 $= AF + AE + EF = 3 + 3 + 2 = 8$

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 75 分。解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 解不等式组
$$\begin{cases} 7 - 4x > 5(1 - x) \\ 4 - \frac{x - 2}{2} < \frac{x}{3} \end{cases}$$

【答案】 $x > 6$

【考点】 解不等式

【解析】 由不等式①, 得 $x > -2$; 由不等式②, 得 $x > 6$. 同大取大, \therefore 不等式组的解为 $x > 6$.

(2) 解方程: $\frac{2x}{2x-1} + \frac{x}{x-2} = 2$

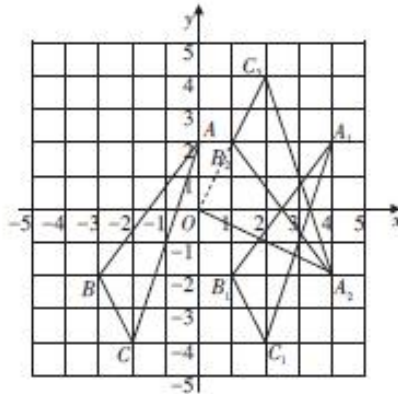
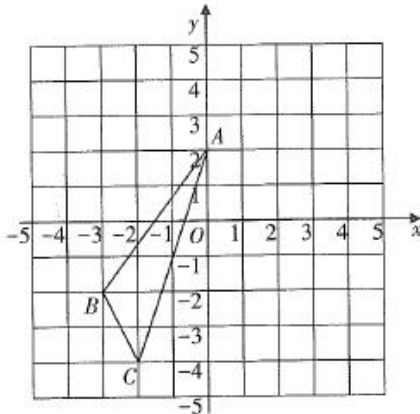
【答案】 $x = \frac{4}{5}$

【考点】 解分式方程

【解析】 $2x(x-2) + x(2x-1) = 2(2x-1)(x-2)$; 解得 $x = \frac{4}{5}$

检验, 当 $x = \frac{4}{5}$ 时, $(2x-1)(x-2) \neq 0$. 所以 $x = \frac{4}{5}$ 是原分式方程得解.

17. (本题 6 分) 如图, 已知在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别是 $A(0,2), B(-3,-2), C(-2,-4)$.



(1) 将 $\triangle ABC$ 向右平移 4 个单位长度后得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 请画出 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) 画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 x 轴对称的 $\triangle A_2B_2C_2$;

(3) 连接 OA_2 , 求 $\sin \angle OA_2C_2$ 的值.

【答案】 (1) 如图所示 (2) 如图所示 (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【考点】 坐标系、图形的平移

【解析】 连接 OC_2

$$\therefore OA_2^2 = OC_2^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \quad A_2C_2^2 = 2^2 + 6^2 = 40$$

$$\therefore OA_2^2 + OC_2^2 = A_2C_2^2 \quad \therefore \triangle OA_2C_2 \text{ 为等腰直角三角形}$$

$$\therefore \angle OA_2C_2 = 45^\circ$$

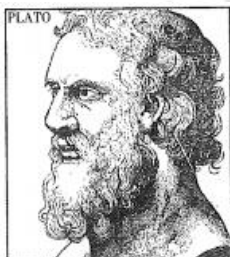
$$\therefore \sin \angle OA_2C_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

18.(本题 6 分)阅读下列内容, 并解决问题.

一道习题引发的思考

小明在学习《勾股定理》一章内容时, 遇到了一个习题, 并对有关内容进行了研究:

习题再现:



古希腊的哲学家柏拉图曾指出, 如果 m 表示大于 1 的整数, $a=2m$, $b=m^2-1$, $c=m^2+1$, 那么 a, b, c 为勾股数. 你认为对吗? 如果对, 你能利用这个结论得出一些勾股数吗?

资料搜集:

定义: 勾股数是指可以构成一个直角三角形三边的一组正整数. 一般地, 若三角形三边长 a, b, c 都是正整数, 且满足 $a^2+b^2=c^2$, 那么 a, b, c 称为一组勾股数.

关于勾股数的研究: 我国西周初数学家商高在公元前 1000 年发现了“勾三, 股四, 弦五”, 这组数(3,4,5)是世界上最早发现的一组勾股数. 毕达哥拉斯学派、柏拉图学派、我

国数学家刘徽、古希腊数学家丢番图都进行过勾股数的研究.习题中的表达式是柏拉图给出的勾股数公式,这个表达式未给出全部勾股数.世界上第一次给出勾股数通解公式的是《九章算术》,其勾股数公式为: $a = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$, $b = mn$, $c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$, 其中 $m > n$, m, n 是互质的奇数. (注: a, b, c 的相同倍数组成的一组数也是勾股数)

问题解答:

- (1) 根据柏拉图的研究, 当 $m=6$ 时, 请直接写出一组勾股数;
- (2) 若 m 表示大于 1 的整数, 试证明 $(m^2-1, 2m, m^2+1)$ 是一组勾股数;
- (3) 请举出一个反例 (即写出一组勾股数), 说明柏拉图给出的勾股数公式不能构造出所有的勾股数.

【答案】 (1) (12, 35, 37) (2) 证明略 (3) 答案不唯一, 例如 (5, 12, 13) (7, 24, 25)

【考点】 勾股数

【解析】 (1) $a=2m=12, b=m^2-1=35, c=m^2+1=37$. 所以: 当 $m=6$ 时, 勾股数为 (12, 35, 37)

(2) 证明: $(m^2-1)^2 + (2m)^2 = m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2+1)^2$

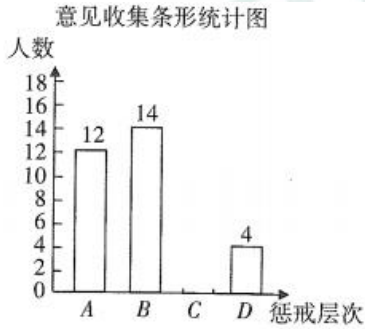
即: $(m^2-1)^2 + (2m)^2 = (m^2+1)^2$.

$\therefore (m^2-1, 2m, m^2+1)$ 是一组勾股数

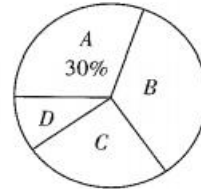
(3) 答案不唯一, 例如 (5, 12, 13) (7, 24, 25)

19.(本题 10 分)2019 年 11 月 22 日, 教育部发布关于《中小学教师实施教育惩戒规则 (征求意见稿)》公开征求意见的通知, 征求意见稿指出: 教育惩戒是教师履行教育教学职责的必要手段和法定职权.教育惩戒分为 A: 一般惩戒, B: 较重惩戒, C: 严重惩戒, D: 强制措施, 共四个层次.为了解家长对教育惩戒的看法, 某中学对学生家长进行了随机调查,

要求每位家长选择其中最关注的一个层次提出意见, 学校对收集的信息进行统计, 绘制了下面两幅不完整的统计图.



意见收集扇形统计图



请你根据统计图提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 被调查的总人数是 _____ 人;
- (2) 扇形统计图中 B 部分对应的圆心角的度数为 _____;
- (3) 补全条形统计图;
- (4) 某班主任对学生进行了纪律教育, 要求小明和小军分别从题中所述的四个层次中随机选择一个层次说明惩戒内容. 请用列表法或画树状图法求两人选择不同教育惩戒层次的概率.

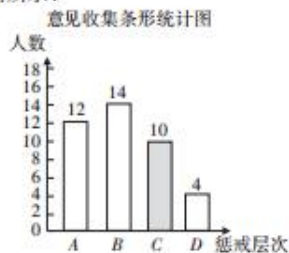
【答案】 (1) 40 (2) 126° (3) C: 10 人 (4) $\frac{3}{4}$

【考点】 统计与概率

【解析】 (1) $12 \div 30\% = 40$ (人)

(2) $14 \div 40 \times 360^\circ = 126^\circ$

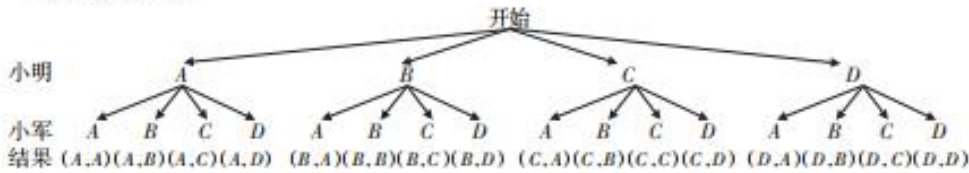
(3) 补全的条形统计图如图所示.



(4)根据题意,列表为:

小明 \ 小军	A	B	C	D
A	(A,A)	(B,A)	(C,A)	(D,A)
B	(A,B)	(B,B)	(C,B)	(D,B)
C	(A,C)	(B,C)	(C,C)	(D,C)
D	(A,D)	(B,D)	(C,D)	(D,D)

或画树状图为:



∴两人选择共有 16 种等可能情况, 其中两人选择不同层次共有 12 种情况.

∴两人选择不同教育惩戒层次的概率为 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

20. (本题 8 分) 2020 年年初以来, 全国多地猪肉价格连续上涨, 引起了民众与政府的高度关注, 政府向市场投入储备猪肉进行了价格平抑. 据统计: 某超市 2020 年 1 月 10 日猪肉价格比去年同一天上涨了 40%, 这天该超市每千克猪肉价格为 56 元.

(1) 求 2019 年 1 月 10 日, 该超市猪肉的价格为每千克多少元?

(2) 现在某超市以每千克 46 元的价格购进猪肉, 按 2020 年 1 月 10 日价格出售, 平均一天能销售 100 千克, 经调查表明: 猪肉的售价每千克下降 1 元, 平均每日销售量就增加 20 千克, 超市为了实现销售猪肉平均每天有 1120 元的销售利润, 在尽可能让利于顾客的前提下, 每千克猪肉应该定价为多少元?

【答案】 (1) 40 元 (2) 53 元

【考点】 一元二次方程应用

【解析】 解: (1) 设 2019 年 1 月 10 日, 该超市猪肉的价格为每千克 x 元.

根据题意, 得 $(1+40\%)x=56$.

解得： $x=40$.

答：2019 年 1 月 10 日猪肉的价格为每千克 40 元 .

(2) 设每千克猪肉应降价 y 元 .

依题意，得 $(56-46-y)(100+20y) = 1120$.

解得： $y_1=2$, $y_2=3$.

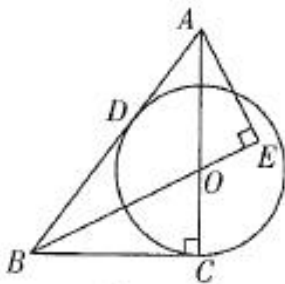
\because 尽可能让利于顾客， $\therefore y=3$. $\therefore 56-y=53$.

答：每千克猪肉应该定价为 53 元 .

21. (本题 9 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，点 O 为 AC 上一点，以点 O 为圆心， OC 为半径的圆 O 与 AB 相切于点 D ， $AE \perp BO$ 交 BO 的延长线于点 E .

(1) 求证： $\angle AOE = \angle BAE$

(2) 若 $BC=12$ ， $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$ ，求圆 O 的半径和 AE 的长 .

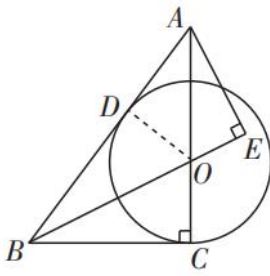


第 21 题图

【答案】 $4\sqrt{5}$; 6

【考点】 圆的计算和证明

【解析】 (1) 如答图，连接 OD



答图

$\because \odot O$ 与 AB 相切于点 D , $\therefore AB \perp OD$.

$\because \angle C = 90^\circ$, $\therefore BC \perp OC$.

又 $OC = OD$, $\therefore BO$ 为 $\angle ABC$ 的平分线. $\therefore \angle ABE = \angle OBC$.

$\because AE \perp BO$ 于点 E , $\therefore \angle E = 90^\circ$. $\therefore \angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$, $\angle AOE + \angle OAE = 90^\circ$.

$\because \angle C = 90^\circ$, $\therefore \angle BOC + \angle OBC = 90^\circ$. 又 $\angle AOE = \angle BOC$. $\therefore \angle OBC = \angle OAE$.

$\therefore \angle ABE = \angle OAE$.

$\therefore \angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$, $\angle AOE + \angle OAE = 90^\circ$. $\therefore \angle AOE = \angle BAE$.

(2) $\because \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$, $\angle DOA + \angle BAC = 90^\circ$, $\therefore \angle DOA = \angle ABC$,

$\therefore \tan \angle BAC = \frac{3}{4}$, $BC = 12$,

$\therefore AC = \frac{BC}{\tan \angle BAC} = 16$.

$\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$

$\therefore \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\therefore \sin \angle BAC = \frac{OD}{AO} = \frac{OD}{AC - OD} = \frac{3}{5}$

$\therefore OD = 6$.

$\because BC = 12$, $OC = OD = 6$.

$\therefore BO = \sqrt{BC^2 + OC^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$

$\therefore BC=12, OC=OD=6, AC=16, \therefore AO=10.$

$\therefore \angle AOE=\angle BOC, \angle E=\angle C=90^\circ, \therefore \triangle AOE \sim \triangle BOC.$

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AO}{BO} \text{ 即 } \frac{AE}{12} = \frac{10}{6\sqrt{5}}$$

$$\therefore AE = 4\sqrt{5}$$

22. (本题 12 分)综合与实践

操作发现:

如图 1 和图 2, 已知点 P 为正方形 ABCD 的边 AD 和 CD 上的一个动点(点 A, D, C 除外), 作射线 BP, 作 $AE \perp BP$ 于点 E, $CF \perp BP$ 于点 F, $DG \perp BP$ 于点 G.

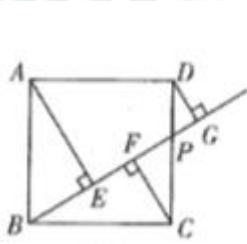


图 1

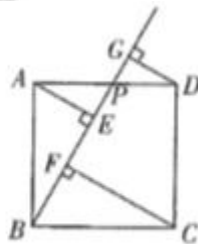


图 2

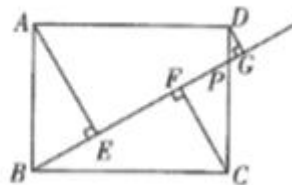


图 3

(1) 如图 1, 当点 P 在 CD 上(点 C, D 除外)运动时, 求证: $AE=CF+DG$;

(2) 如图 2, 当点 P 在 AD 上(点 A, D 除外)运动时, 请直接写出线段 AE, CF, DC 之间的数量关系;

拓广探索:

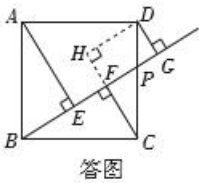
(3) 在(1)的条件下, 找出与 DG 相等的线段, 并说明理由;

(4) 如图 3, 若点 P 为矩形 ABCD 的边 CD 上一点, 作射线 BP, 作 $AE \perp BP$ 于点 E, $CF \perp BP$ 于点 F, $DG \perp BP$ 于点 G. 若 $CD=2BE=6, EG=4\sqrt{3}$, 则 $DG=$.

【答案】 $AE=CF+DG$ $CF=AE+DC$ EF $3\sqrt{3}-4$

【考点】 正方形动点线段问题

【解析】



(1) 证明：如答图，过点 D 作 $DH \perp CF$ 交 CF 的延长线于点 H，则 $\angle CHD = \angle AEB = 90^\circ$ 。

\therefore 四边形 ABCD 为正方形，

$\therefore AB = CD, AB \parallel CD$ 。

$\therefore \angle ABE = \angle CPF$ 。

$\therefore AE \perp BP, CF \perp BP, DG \perp BP$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle CFP = \angle DGF = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle ABE + \angle BAE = \angle CPF + \angle DCH = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle BAE = \angle DCH$ 。

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDH$ 中， $\angle AEB = \angle CHD, \angle BAE = \angle DCH, AB = CD$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDH$ (AAS)。

$\therefore AE = CH$

$\therefore \angle CHD = \angle HFG = \angle DGF = 90^\circ$ ，

\therefore 四边形 HFGD 为矩形。

$\therefore HF = DG$ ，

$\therefore AE = CH = CF + HF = CF + DG$

(2) 线段 AE, CF, DG 之间的数量关系是 $CF = AE + DG$ 。

(3) 与 DG 相等的线段是 EF。

理由如下：如图 1，

∵ 四边形 ABCD 为正方形，

∴ $AB=BC$ ， $\angle ABC=90^\circ$ 。

∵ $AE \perp BP$ ，

∴ $\angle AEB=90^\circ$ 。

∴ $\angle ABE + \angle BAE = \angle ABE + \angle CBF = 90^\circ$ 。

∴ $\angle BAE = \angle CBF$ 。

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$\angle AEB = \angle BFC$ ， $\angle BAE = \angle CBF$ ， $AB = BC$ ，

∴ $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ (AAS)。

∴ $AE = BF$ ， $BE = CF$ 。

∴ $AE = BF = BE + EF = CF + EF$ 。

由 (1)，得 $AE = CF + DG$ 。

∴ $DG = EF$ 。

$$(4) 3\sqrt{3} - 4$$

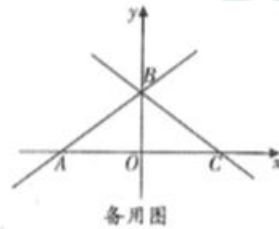
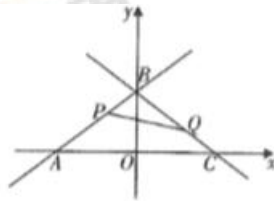
23. (本题 14 分)如图,在平面直角坐标系中,点 O 为坐标原点,直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴交于点 A,与 y 轴交于点 B,直线 BC 与 x 轴交于点 C,且点 C 与点 A 关于 y 轴对称。

求直线 BC 的解析式;

(2)点 P 为线段 AB 上一点,点 Q 为线段 BC 上一点, $BQ=AP$,连接 PQ,设点 P 的横坐标为 t,

$\triangle PBQ$ 的面积为 S($S \neq 0$),求 S 与 t 之间的函数关系式(不要求写出自变量 t 的取值范围);

(3)在(2)的条件下,当 S 取最大值时,若点 M 是平面内的任意一点,在直线 AB 上是否存在点 N ,使得以点 P, Q, M, N 为顶点的四边形是菱形,若存在,请直接写出符合条件的点 N 坐标;若不存在,请说明理由.



【答案】 $y = \frac{3}{4}x + 3$ $s = -\frac{3}{4}t^2 - 3t$.

$(0, 3)$ $(\frac{6}{5}, \frac{39}{10})$ $(-\frac{26}{5}, -\frac{9}{10})$ 或 $(\frac{78}{25}, \frac{267}{50})$

【考点】 一次函数

【解析】 (1) $\because y = \frac{3}{4}x + 3$, 当 $y = 0$ 时, $x = -4$; 当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

$\therefore A(-4, 0)$, $B(0, 3)$

\because 点 C 与点 A 关于 y 轴对称,

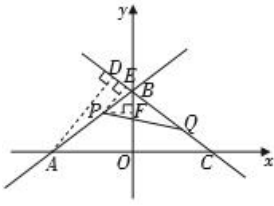
$\therefore C(4, 0)$.

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

将 $B(0, 3)$, $C(4, 0)$ 代入, 得 $\begin{cases} b = 3 \\ 4k + b = 0 \end{cases}$. 解得 $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$.

\therefore 直线 BC 的解析式 $y = \frac{3}{4}x + 3$

(2)



如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D, 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E, $PF \perp OB$ 于点 F.

$$\because OA=OC=4, OB=3,$$

$$\therefore AC=8, AB=BC=3^2+4^2=5.$$

$$\therefore \sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{OB}{BC}, \text{ 即 } \frac{AD}{8} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore AD = \frac{24}{5}.$$

$$\therefore \text{点 P 在直线 } y = \frac{3}{4}x + 3 \text{ 上,}$$

$$\therefore \text{设 } P(t, \frac{3}{4}t + 3)$$

$$\therefore PF = -t, \cos \angle BPF = \cos \angle BAO. \text{ 即 } \frac{PF}{PB} = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore PB = -\frac{5}{4}t$$

$$\therefore PE = \frac{24}{25} PB = \frac{24}{25} \times (-\frac{5}{4}t) = (-\frac{6}{5}t)$$

$$\therefore AP=BQ,$$

$$\therefore BQ = AB - PB = 5 + \frac{5}{4}t$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} BQ \cdot PE = 12 \times (5 + \frac{5}{4}t) \times (-\frac{6}{5}t)$$

$$\text{即 } S = -\frac{3}{4}t^2 - 3t.$$

(3) 在直线 AB 上存在点 N, 使得以点 P, Q, M, N 为顶点的四边形是菱形, 点 N 坐

标为 $(0, 3)$ 或 $(\frac{6}{5}, \frac{39}{10})$ 或 $(-\frac{26}{5}, -\frac{9}{10})$ 或 $(\frac{78}{25}, \frac{267}{50})$