太原市 2020 年高三年级模拟试题（二）

数学试题（理）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	B	D	C	A	B	B	D	C	B	D

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. $\dfrac{1}{2}$　　14. $\sqrt{2}$　　15. $2n^2-n$　　16. ②④

三、解答题（共 70 分）

（一）必考题

17. （本小题满分 12 分）

解(Ⅰ) 由正弦定理，有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$，　……1 分

$\therefore \sin A=\dfrac{a}{2},\sin B=\dfrac{b}{2},\sin C=\dfrac{c}{2}$，

代入 $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}a-b}{2}$，得 $\dfrac{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{c^2}{4}}{\dfrac{b}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}a-b}{2}$，　……3 分

则 $a^2-c^2=\sqrt{2}ab-b^2$，即 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　……5 分

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{4}$.　……6 分

(Ⅱ) 由正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=2$ 得 $c=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，　……7 分

由余弦定理 $2=a^2+b^2-2ab\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ge 2ab-\sqrt{2}ab=(2-\sqrt{2})ab$，　……9 分

$\therefore ab\le\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，　……10 分

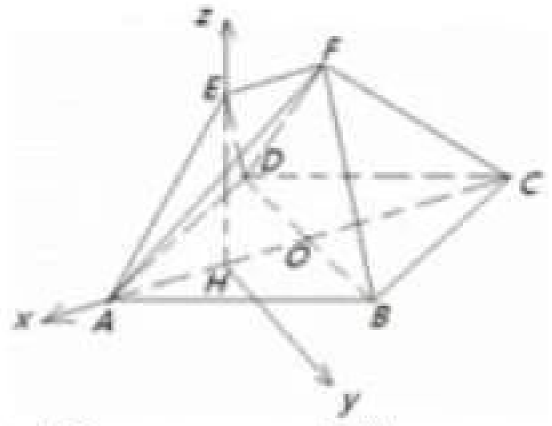
$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}$最大值$=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，　　……………………12 分

18. （本小题满分 12 分）

证明(Ⅰ) 取 AO 的中点 H，连结 EH，则 EH⊥平面 ABCD，

∵BD 在平面 ABCD 内，∴EH⊥BD，　　……………………2 分



又菱形 ABCD 中，AC⊥BD，且 EH∩AC=H，

EH、AC 在平面 EACF 内，　　……………………4 分

∴BD⊥平面 EACF，即 BD⊥平面 ACF.　　……………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 EH⊥平面 ABCD，以 H 为原点，

建立如图所示空间直角坐标系 H - xyz，

∵EH⊥平面 ABCD，∴∠EAH 为 AE 与平面 ABCD 所成的角，即∠EAH=45°，…………6 分

又 AB=4，则$AO=2\sqrt{3}$，$AH=\sqrt{3}$，$EH=\sqrt{3}$，

∴$H(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$D(-\sqrt{3},-2,0)$，$O(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$，

易知$\vec{n}=\overrightarrow{HE}=(0,0,\sqrt{3})$为平面 ABCD 的一个法向量，　　……………………8 分

$\overrightarrow{AO}=(-2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{3},2,\sqrt{3})$，　∵EF∥AC，∴$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{AO}=(-2\sqrt{3}\lambda,0,0)$，

设平面 DEF 的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\vec{m}\perp\overrightarrow{DE}$，$\vec{m}\perp\overrightarrow{EF}$，

即 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}x+2y+\sqrt{3}z=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=-2\sqrt{3}\lambda x=0$，

令$y=\sqrt{3}$，则$x=0$，$z=-2$，则$\vec{m}=(0,\sqrt{3},-2)$为平面 DEF 的一个法向量，　…………10 分

$\therefore \cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，　……………………11 分

所以平面 DEF 与平面 ABCD 所成角的正弦值为

$\sqrt{1-(-\dfrac{2\sqrt{7}}{7})^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.　　……………………12 分

19. （本小题满分 12 分）

解(Ⅰ) 直线$x+y=1$与 y 轴交于（0,1）点，$\therefore b=1$，……………………1 分

设直线$x+y=1$与椭圆 C 交于点$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{3}{2}$，$y_1+y_2=\dfrac{1}{2}$，

$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，　①　　　$\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，　②

①−②得$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，

$\therefore \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$，　　$\therefore -\dfrac{b^2}{a^2}\bullet\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$，解得$a^2=3$，……………………4 分

∴椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，设 $A(x_3,y_3),B(x_4,y_4)$，

将直线 l 的方程 $x=my-\sqrt{2}$ 代入$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，得 $(m^2+3)y^2-2\sqrt{2}my-1=0$，

则$\begin{cases} y_3+y_4=\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+3}, \\ y_3\cdot y_4=\dfrac{-1}{m^2+3}, \end{cases}$ $|y_3-y_4|=\sqrt{(y_3-y_4)^2-4y_3y_4}=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$， ……7 分

$\therefore S_{\Delta ABF_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2||y_3-y_4|=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times|y_3-y_4|=\sqrt{2}|y_3-y_4|$

$=\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{m^2+1}+\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}}\le\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$， ……9 分

当且仅当 $\sqrt{m^2+1}=\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}$，即 $m=\pm1$ 时，ΔABF_2 面积最大， ……10 分

直线 l 的方程为 $x-y+\sqrt{2}=0$ 或 $x+y+\sqrt{2}=0$. ……12 分

20.（本小题满分 12 分）

解(Ⅰ)根据频率分布直方图中的分组，用分层抽样的方法抽取的 40 件产品中，尺寸在[12, 13)，[13, 14)，[14, 15]的产品数分别为 8, 7, 3，……1 分

ξ 的可能取值为 0, 1, 2，

$P(\xi=0)=\dfrac{C_{15}^2}{C_{18}^2}=\dfrac{35}{51}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_{15}^1C_3^1}{C_{18}^2}=\dfrac{5}{17}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_3^2}{C_{18}^2}=\dfrac{1}{51}$，

∴ ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{35}{51}$	$\dfrac{5}{17}$	$\dfrac{1}{51}$

……4 分

∴ $E\xi=0\times\dfrac{35}{51}+1\times\dfrac{5}{17}+2\times\dfrac{1}{51}=\dfrac{1}{3}$. ……5 分

（Ⅱ）由频率分布直方图知，甲设备产品中一、二、三级品的概率分别是 $\frac{1}{2},\frac{13}{40},\frac{7}{40}$， …6 分

设对剩余产品进行一一检验，厂家支付费用为 y_1 元，

则 $y_1=50\times100=5000$（元）， ……………………………………7 分

设不对剩余产品进行一一检验，厂家支付费用为 y_2 元，

则 $y_2=50\times10+90\times\frac{7}{40}\times200=3650$（元）， ……………………………8 分

$\because y_1>y_2$， $\therefore$ 不对该箱中剩余产品进行一一检验． ……………………9 分

（Ⅲ）设甲、乙设备生产该产品一件的平均利润分别为 y_3 元， y_4 元，

$\therefore\ y_3=500\times\frac{1}{2}+400\times\frac{13}{40}+200\times\frac{7}{40}=415$（元），

$y_4=500\times\frac{2}{5}+400\times\frac{1}{2}+200\times\frac{1}{10}=420$（元）， ……………………………………11 分

$\because y_3<y_4$， $\therefore$ 应选购乙设备． ……………………………………12 分

21．（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ） $f(x)$ 的定义域是 $x>0$ ， $f'(x)=\frac{1}{x}+a$， ………………………………1 分

①当 $a\geq0$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在定义域上单调递增，不可能有两个零点； …………2 分

②当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=\frac{1}{x}+a=0$，得 $x=-\frac{1}{a}>0$，

当 $x\in(0,-\frac{1}{a})$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在定义域上单调递增；

当 $x\in(-\frac{1}{a},+\infty)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在定义域上单调递减；

$\therefore\ x=-\frac{1}{a}$ 时， $f(x)$ 取得极大值．

因为 $f(x)$ 有两个零点，所以 $f(-\frac{1}{a})>0$，解得 $-1<a<0$， ……………………4 分

$\because f(\frac{1}{e})=\frac{a}{e}<0$ ， $\therefore\ f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{a})$ 有唯一实数根；

取 $x_0=\dfrac{e}{(-a)^2}>-\dfrac{1}{a}$，则 $f(x_0)=1+2\ln(-\dfrac{1}{a})+\dfrac{e}{a}+1<2+2(-\dfrac{1}{a}-1)+\dfrac{e}{a}=\dfrac{e-2}{a}<0$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 有唯一实数根. a 的取值范围是 $(-1,0)$.　　　　......................6 分

（Ⅱ）$f(x)\le xe^x$ 恒成立，即 $xe^x\ge \ln x+ax+1$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

也就是 $a\le e^x-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，　　　　................................7 分

令 $g(x)=e^x-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$，则 $g'(x)=e^x+\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$

令 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $h'(x)=2xe^x+x^2e^x+\dfrac{1}{x}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，　　　　..8 分

而 $h(1)=e>0$，$h(\dfrac{1}{e})=\dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1<0$，

$\therefore \exists x_0\in(\dfrac{1}{e},1)$ 使得 $h(x_0)=0$，即 $x_0{}^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

$\therefore x_0e^{x_0}=-\dfrac{1}{x_0}\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}=\ln\dfrac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，　令 $\varphi(x)=xe^x$，

在 $(0,+\infty)$ 上 $\varphi'(x)=(x+1)e^x>0$，$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}$，　....10 分

而在 $(0,x_0)$ 上，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

在 $(x_0,+\infty)$ 上，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=e^{\ln\frac{1}{x_0}}-\dfrac{-x_0}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=1$，$\therefore a\le 1$.

$\therefore$ a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.　　　　..12 分

22.（本小题满分 10 分）

解（Ⅰ）由 $\begin{cases} x=\dfrac{t}{t+1}, \\ y=\dfrac{2t+1}{t+1}, \end{cases}$ 消去参数 t 得曲线 C_1 普通方程为 $x-y+1=0$，　......................2 分

由 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ 消去参数 α 得曲线 C_2 的直角坐标为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$，

得曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$. ……………………………5 分

（Ⅱ）由 $\rho = 4\cos\theta$ 得点 P 坐标为 $P(4\cos\beta, \beta)$ $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$，

又直线 $x - y + 1 = 0$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta - \rho\sin\theta + 1 = 0$，

得点 $Q(\frac{1}{\cos\beta + \sin\beta}, \frac{\pi}{2} + \beta)$， ……………………………7 分

$\therefore$ $S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2} \cdot 4\cos\beta \cdot \frac{1}{\cos\beta + \sin\beta} = 1$， ……………………………8 分

$\therefore$ $\cos\beta = \sin\beta$，$\beta = \frac{\pi}{4}$，

$\therefore$ $|OP| = 4\cos\beta = 2\sqrt{2}$. ……………………………10 分

【选修 4-5：不等式选讲】

证明（Ⅰ）$(\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1)(\frac{1}{c} - 1) = \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{a+b}{c}$

$\geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ac}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$. ……………………………5 分

（Ⅱ）$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = (\frac{a+b+c}{b+c} - 1) + (\frac{a+b+c}{a+c} - 1) + (\frac{a+b+c}{a+b} - 1)$

$= \frac{1}{2}[(b+c) + (a+c) + (a+b)](\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}) - 3$

$\geq \frac{1}{2}[\sqrt{b+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \sqrt{a+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+c}} + \sqrt{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+b}}]^2 - 3$

$= \frac{1}{2} \times 3^2 - 3 = \frac{3}{2}$. ……………………………10 分

注：以上各题其他正确解法相应得分