太原市 2020 年高三年级模拟试题（三）

数学试题（文）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	D	C	B	A	C	C	C	B	A

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 8　　14. $\frac{1}{8}$　　15. $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　16. $(-\infty,-\frac{13}{2})$ ， $-\frac{13}{2}$

三、解答题（共 70 分）

17. （本小题满分 12 分）

（1）甲小区分数集中于 60~90 之间，乙小区分数集中于 80~100 之间，所以乙小区的平均分高. ………………3 分

（2）记分数为 87 的家庭为 A、B，其他不低于 80 的家庭为 C,D,E,F,

则从甲小区不低于 80 分的家庭中随机抽取两户的基本事件有：

（A,B），（A,C），（A,D），（A,E），（A,F），（B,C），（B,D），（B,E），（B,F），（C,D），（C,E），（C,F），（D,E），（D,F），（E,F）共 15 个.

“分数为 87 的家庭至少有一户被抽中的”所组成的基本事件有：（A,B），（A,C），（A,D），（A,E），（A,F），（B,C），（B,D），（B,E），（B,F）共 9 个，

故所求概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ………………8 分

（3）

	甲	乙	合计
优秀	3	10	13
不优秀	17	10	27
合计	20	20	40

$$K^2=\frac{40\times(3\times10-17\times10)^2}{20\times20\times13\times27}\approx5.584>5.204.$$

因此可以在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为得分是否优秀与小区宣传培训方式有关． ………………12 分

18．(本小题满分 12 分)

解：（1）因为 $a=b\cos C+c\sin B$，

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$． ……………………………2 分

又因为 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C+\sin C\sin B$，

即 $\cos B\sin C=\sin C\sin B$． ……………………………………………………………………4 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin B=\cos B$．

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$． ....6 分

（2）因为 AD 是$\angle BAC$ 的平分线，设$\angle BAD=\theta$，所以 $A=2\theta$，

所以 $\cos 2\theta=\cos A=-\frac{7}{25}$，即 $2\cos^2\theta-1=-\frac{7}{25}$，所以 $\cos^2\theta=\frac{9}{25}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{4}{5}$.

在$\triangle ABD$ 中，$\sin\angle ADB=\sin(B+\theta)=\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$ ……………………………………7 分

由$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，得 $AB=\frac{AD\ \sin\angle ADB}{\sin B}=\frac{17}{7}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\sqrt{2}=\frac{17}{5}$. ……………………8 分

在$\triangle ABC$ 中，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{24}{25}$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{24}{25}-\frac{7}{25})=\frac{17\sqrt{2}}{50}$. ……………10 分

由$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $b=\frac{c\ \sin B}{\sin C}=\frac{\frac{17}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{17\sqrt{2}}{50}}=5$. ……………………………………12 分

19(本小题满分 12 分)

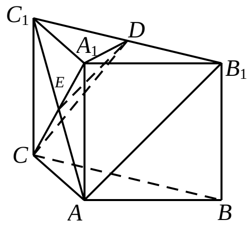
解（1）如图，连结 AC_1 交 A_1C 于点 E，连结 DE， ....1 分

因为四边形 AA_1C_1C 是矩形，　所以 点 E 是 A_1C 的中点，.. 2 分

因为 D 是 B_1C_1 的中点，所以　$DE\ //\ AB_1$， ....3 分

因为 $AB_1 \not\subset$ 平面 A_1CD， $DE \subset$ 平面 A_1CD，

所以 $AB_1 //$ 平面 A_1CD． ....4 分



（2）因为棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1 \perp A_1C_1$，

因为 $A_1B_1 \perp A_1C_1$，$A_1A = A_1B_1$，

所以 $AC_1 = B_1C_1$， .... 5 分

因为 AB_1 和 BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{26}}{13}$， 所以 $\cos\angle AB_1C_1 = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$ ，........... 6 分

因为 $A_1A = A_1B_1 = 2$，$A_1A \perp A_1B_1$， 所以 $AB_1 = 2\sqrt{2}$， ....7 分

在 ΔAB_1C_1 中， $AC_1{}^2 = B_1C_1{}^2 + AB_1^2 - 2B_1C_1 \cdot AB_1 \cdot \cos\angle AB_1C_1$

可得 $B_1C_1 = \sqrt{13}$， .... 8 分

因为 $A_1B_1 \perp A_1C_1$， $A_1B_1 = 2$，所以 $A_1C_1 = 3$，

因为 $C_1A_1 \perp A_1B_1, C_1A_1 \perp A_1A, A_1A \cap A_1B_1 = A_1$， 所以 $C_1A_1 \perp$ 平面 A_1B，

同理 $A_1B_1 \perp$ 平面 A_1C， .... 10 分

所以 $V_{A_1B_1DCA} = V_{D-A_1AB_1} + V_{D-AA_1C}$，

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times 1 = 2 \text{ ，}$$

所以 几何体 A_1B_1DCA 的体积为 2． ....12 分

20．(本小题满分 12 分)

解（1）因为椭圆 C 的焦距为 2，所以 $a^2 - b^2 = 1$， ....1 分

因为椭圆 C 过点（1，$\dfrac{3}{2}$），所以 $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{9}{4b^2} = 1$． ....2 分

解得 $a^2 = 4$，$b^2 = 3$， ....4 分

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$． ....5 分

（2）设 $B(m，n)$，记线段 MN 中点为 D．

因为 O 为△BMN 的重心，所以 $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OD}$，则点 D 的坐标为($-\dfrac{m}{2}$，$-\dfrac{n}{2}$)． ………6 分

若 $n=0$，则$|m|=2$，此时直线 MN 与 x 轴垂直，

故原点 O 到直线 MN 的距离为$|\frac{m}{2}|$，即为 1.

若 $n\neq0$，此时直线 MN 的斜率存在.

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=-m$，$y_1+y_2=-n$.

又$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，两式相减得$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$，

可得 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3m}{4n}$. ....8 分

故直线 MN 的方程为 $y=-\frac{3m}{4n}(x+\frac{m}{2})-\frac{n}{2}$，即 $6mx+8ny+3m^2+4n^2=0$，

则点 O 到直线 MN 的距离为 $d=\frac{|3m^2+4n^2|}{\sqrt{36m^2+64n^2}}$.

将$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1$，代入得 $d=\frac{3}{\sqrt{n^2+9}}$. ....10 分

因为 $0<n^2\leq3$，所以 $d_{min}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\frac{\sqrt{3}}{2}<1$，故原点 O 到直线 MN 距离的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. ....12 分

21．(本小题满分 12 分)

解：（1） $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $k=-1$ 时， $f(x)=\ln x-x,\ f'(x)=\frac{1}{x}-1$， ....1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，当 $f'(x)>0, 0<x<1;\ f'(x)<0, x>1$， ....3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 有极大值点 $x=1$，无极小值点. ....6 分

（2）当 $k=0$ 时， $f(x)+\frac{b}{x}-a=\ln x+\frac{b}{x}-a$.

若 $f(x)+\frac{b}{x}-a\geqslant0, (a,b\in R)$ 恒成立，则 $\ln x+\frac{b}{x}-a\geqslant0 (a,b\in R)$ 恒成立，

所以 $a\leqslant\ln x+\frac{b}{x}$ 恒成立， ....7 分

令 $y=\ln x+\frac{b}{x}$，则 $y'=\frac{x-b}{x^2}$，

由题意 $b>0$，函数在 $(0,b)$ 上单调递减，在 $(b,+\infty)$ 上单调递增， ....9 分

所以 $a\leqslant\ln b+1$，所以 $a-1\leqslant\ln b$ ....10 分

所以 $e^{a-1}\leqslant b$，$e^{a-1}-b+1\leqslant1$， ....11 分

故当且仅当$e^{a-1}=b$时，$e^{a-1}-b+1$的最大值为 1．　　　　………………12 分

22．（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

解（1）因为$\rho=6\cos\theta$，所以$\rho^2=6\rho\cos\theta$，

所以$x^2+y^2=6x$，即曲线C的直角坐标方程为$(x-3)^2+y^2=9$，　　…………2 分

直线l的参数方程$\begin{cases}x=t\cos\dfrac{3\pi}{4},\\ y=2+t\sin\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$($t$为参数)，即$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$为参数)，

………………………………………5 分

（2）设点A，B对应的参数分别为t_1，t_2，

将直线l的参数方程代入曲线C的直角坐标方程得$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-3\right)^2+\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=9$，

整理，得$t^2+5\sqrt{2}t+4=0$，所以$\begin{cases}t_1+t_2=-5\sqrt{2}\\ t_1t_2=4\end{cases}$，　　……………………7 分

$\because t_1+t_2<0, t_1\cdot t_2>0, \therefore t_1<0, t_2<0$，

所以$|MA|+|MB|=|t_1|+|t_2|=-(t_1+t_2)=5\sqrt{2}$，$|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=4$,

所以$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$．　　…………………………10 分

23．（本小题满分10分）选修4-5：不等式选讲

解（1）当$a=1$时，$f(x)<4\Rightarrow|x+1|+|x-2|<4$，

化为$\begin{cases}x<-1\\ 2x>-3\end{cases}$或$\begin{cases}-1\le x\le 2\\ 3<4\end{cases}$或$\begin{cases}x>2\\ 2x-1<4\end{cases}$，………………………………3 分

解得$-\dfrac{3}{2}<x<-1$或$-1\le x\le 2$或$2<x<\dfrac{5}{2}$，

$\therefore -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$．即不等式$f(x)<4$的解集为$(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$．………………………5 分

（2）根据题意，得m^2-2m+4的取值范围是$f(x)$值域的子集.

$m^2-2m+4=(m-1)^2+3\ge 3$，

又由于$f(x)=|x+1|+|x-2a|\ge|2a+1|$，$\therefore f(x)$的值域为$[|2a+1|,+\infty)$，

………………………………………8 分

故$|2a+1|\le 3$，$\therefore -2\le a\le 1$.即实数a的取值范围为$[-2,1]$．　……………10 分

注：以上各题其他正确解法相应得分