太原市 2020 年高三年级模拟试题（三）

数学试题（理）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	A	B	D	D	A	C	C	B	C

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 8　　14. $\dfrac{2\pi}{3}$　　15. $\sqrt{3}$　　16. ①②③④

三、解答题（共 70 分）

17.（本小题满分 12 分）

解（1）由已知得，$a_1b_2+b_2=b_1$，所以 $a_1=1$.　　………………1分

又因为 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列，所以 $a_n=n$.　　………………3 分

所以 $(n+1)b_{n+1}=nb_n$，所以数列 $\{nb_n\}$ 是常数数列，

所以 $nb_n=b_1=1$，所以 $b_n=\dfrac{1}{n}$.　　………………6 分

（2）由已知得, $c_n=\dfrac{n}{2^n}$，　　………………7 分

所以 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，　①

$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}}$，　②

①—②得 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，…11 分

$\therefore S_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.　　………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）2×2 列联表：

	年龄低于 65 岁的人数	年龄不低于 65 岁的人数	合计
了解	a=29	c=3	32
不了解	b=11	d=7	18
合计	40	10	50

………………4 分

$K^2=\dfrac{50\times(29\times7-11\times3)^2}{40\times10\times32\times18}\approx6.272<6.635$. ………………5 分

所以不能在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为以 65 岁为分界点居民对了解垃圾分类的有关知识有差异. ………………6 分

（2）X 的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(x=0)=\dfrac{C_8^2C_4^2}{C_{10}^2C_5^2}=\dfrac{84}{225}$，　　$P(x=1)=\dfrac{C_8^2C_4^1+C_8^1C_2^1C_4^2}{C_{10}^2C_5^2}=\dfrac{104}{225}$，

$P(x=2)=\dfrac{C_8^1C_2^1C_4^1+C_2^2C_4^2}{C_{10}^2C_5^2}=\dfrac{35}{225}$，　　$P(x=3)=\dfrac{C_2^2C_4^1}{C_{10}^2C_5^2}=\dfrac{2}{225}$，

则 X 的分布列为

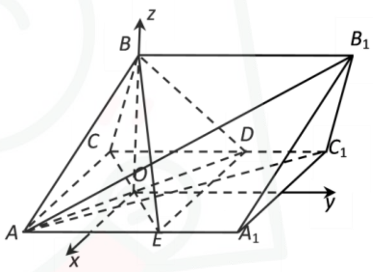
X	0	1	2	3
P	$\dfrac{84}{225}$	$\dfrac{104}{225}$	$\dfrac{35}{225}$	$\dfrac{2}{225}$

………………10 分

所以 X 的数学期望是 $EX=0+\dfrac{104}{225}+\dfrac{70}{225}+\dfrac{6}{225}=\dfrac{4}{5}$. ………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

证明（1）如图，过点 D 作 $DE//AC$ 交 AA_1 于 E，连接 CE,BE，



设 $AD\bigcap CE=O$，连接 BO，$\because AC\perp AA_1$，$\therefore DE\perp AE$，

又 AD 为 $\angle A_1AC$ 的角平分线，

$\therefore$ 四边形 $AEDC$ 为正方形，$\therefore CE\perp AD$，.............2 分

又 $\because AC=AE$，$\angle BAC=\angle BAE$，$BA=BA$，

$\therefore \Delta BAC\cong\Delta BAE$，$\therefore BC=BE$，

又 $\because O$ 为 CE 的中点，$\therefore CE\perp BO$. ....4 分

又 $\because AD,BO\subset$ 平面 BAD，$AD\bigcap BO=O$，$\therefore CE\perp$ 平面 BAD，...............................5 分

又 $\because CE\subset$ 平面 AA_1C_1C，$\therefore$ 平面 $BAD\perp$ 平面 AA_1C_1C，..6 分

（2）在 ΔABC 中，$\because AB=AC=4$，$\angle BAC=60^\circ$，$\therefore BC=4$，

在 RtΔBOC 中，$\because CO=\dfrac{1}{2}CE=2\sqrt{2}$，$\therefore BO=2\sqrt{2}$，

又 $AB=4$，$AO=\dfrac{1}{2}AD=2\sqrt{2}$，$\because BO^2+AO^2=AB^2$，$\therefore BO\perp AD$，

又 $BO\perp CE$，$AD\bigcap CE=O$，$AD,CE\subset$ 平面 AA_1C_1C，$\therefore BO\perp$ 平面 AA_1C_1C，.........7 分

建立如图空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $A(2,-2,0)$，$A_1(2,4,0)$，$C_1(-2,4,0)$，

$B_1(0,6,2\sqrt{2})$，$\therefore \overrightarrow{C_1B_1}=(2,2,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC_1}=(-4,6,0)$，$\overrightarrow{C_1A_1}=(4,0,0)$，

设平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{C_1B_1}\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{AC_1}\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}-4x_1+6y_1=0\\ 2x_1+2y_1+2\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=6$，得 $\vec{m}=(6,4,-5\sqrt{2})$，..9 分

设平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overline{C_1B_1}\\\vec{n}\perp\overline{C_1A_1}\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}4x_2=0\\2x_2+2y_2+2\sqrt{2}z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=\sqrt{2}$，得 $\vec{n}=(0,\sqrt{2},-1)$，..11 分

$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{102}\times\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$，

由可知二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 是锐角，故二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. ....12 分

20．(本小题满分 12 分)

解（1）因为椭圆 C 的焦距为 2，所以 $a^2-b^2=1$，..1 分

因为椭圆 C 过点（1，$\dfrac{3}{2}$），所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$. ....2 分

解得 $a^2=4$，$b^2=3$，..4 分

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ....5 分

（2）设 $B(m，n)$，记线段 MN 中点为 D.

因为 O 为△BMN 的重心，所以 $\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OD}$，则点 D 的坐标为$(-\dfrac{m}{2}，-\dfrac{n}{2})$. ………6 分

若 $n=0$，则$|m|=2$，此时直线 MN 与 x 轴垂直，

故原点 O 到直线 MN 的距离为$|\dfrac{m}{2}|$，即为 1.

若 $n\neq0$，此时直线 MN 的斜率存在.

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=-m$，$y_1+y_2=-n$.

又$\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，$\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$，两式相减得$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$，

可得 $k_{MN}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{3m}{4n}$. ……………………………………………………8 分

故直线 MN 的方程为 $y=-\dfrac{3m}{4n}(x+\dfrac{m}{2})-\dfrac{n}{2}$，即 $6mx+8ny+3m^2+4n^2=0$，

则点 O 到直线 MN 的距离为 $d=\dfrac{|3m^2+4n^2|}{\sqrt{36m^2+64n^2}}$.

将$\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{3}=1$，代入得 $d=\dfrac{3}{\sqrt{n^2+9}}$. ……………………………………………10 分

因为 $0<n^2\leq3$，所以 $d_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$，故原点 O 到直线 MN 距离的最小值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（1） $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-2ax=\ln x-2ax+1(x>0)$ ，…………………………1 分

令 $f'(x)=0$, 得 $2a=\frac{1+\ln x}{x}$，记 $Q(x)=\frac{1+\ln x}{x}$, 则 $Q'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，

令 $Q'(x)>0$，得 $0<x<1$；令 $Q'(x)<0$，得 $x>1$，

$\therefore Q(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，且 $Q(x)_{最大}=Q(1)=1$，

$\therefore$ 当 $2a>1$, 即 $a>\frac{1}{2}$ 时， $f'(x)=0$ 无解，$\therefore$ $f(x)$ 无极值点，

当 $2a=1$, 即 $a=\frac{1}{2}$ 时， $f'(x)\le 0$ 恒成立，$\therefore$ $f(x)$ 无极值点，

当 $0<2a<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时， $f'(x)=0$ 有两解，$\therefore$ $f(x)$ 有 2 个极值点

当 $2a\le 0$ 即 $a\le 0$ 时， $f'(x)=0$ 有一解， $f(x)$ 有一个极值点.

综上所述：当 $a\ge\frac{1}{2}$, $f(x)$ 无极值点；$0<a<\frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 有 2 个极值点；

当 $a\le 0$， $f(x)$ 有 1 个极值点. …………………………6 分

（2） $g(x)=x\ln x-ax^2-x$， $g'(x)=\ln x-2ax(x>0)$，

令 $g'(x)=0$，则 $\ln x-2ax=0$，$\therefore 2a=\frac{\ln x}{x}$，

记 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

由 $h'(x)>0$, 得 $0<x<e$，由 $h'(x)<0$，得 $x>e$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,e)$ 上是增函数，在 $(e,+\infty)$ 上是减函数，

$h_{\max}(x)=h(e)=\frac{1}{e}$, 当 $x>e$ 时， $f(x)>0$，

$\therefore$ 当 $0<2a<\frac{1}{e}$ 即 $0<a<\frac{1}{2e}$ 时， $g(x)$ 有 2 个极值点 x_1,x_2. ……………7 分

由 $\begin{cases}\ln x_1=2ax_1\\ \ln x_2=2ax_2\end{cases}$，

得 $\ln(x_1x_2)=\ln x_1+\ln x_2=2a(x_1+x_2)$ ，

$\therefore 2a=\frac{\ln(x_1x_2)}{x_1+x_2}$ ， …………………8 分

不妨设 $x_1<x_2$, 则 $1<x_1<e<x_2$，$\therefore x_1+x_2>x_2>e$ ， …………………9 分

又 $h(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上是减函数，

$\therefore \frac{\ln(x_1+x_2)}{x_1+x_2}<\frac{\ln x_2}{x_2}=2a=\frac{\ln(x_1x_2)}{x_1+x_2}$ ， ……………………11 分

$\therefore \ln(x_1+x_2)<\ln(x_1x_2)$ ，

$\therefore x_1+x_2<x_1x_2$. …………………12 分

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

解（1）因为 $\rho=6\cos\theta$，所以 $\rho^2=6\rho\cos\theta$，

所以 $x^2+y^2=6x$，即曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-3)^2+y^2=9$，…………2 分

直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=t\cos\dfrac{3\pi}{4},\\ y=2+t\sin\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$（$t$ 为参数），即 $\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

…………………………………5 分

（2）设点 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程得 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-3\right)^2+\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=9$，

整理，得 $t^2+5\sqrt{2}t+4=0$，所以 $\begin{cases}t_1+t_2=-5\sqrt{2}\\ t_1t_2=4\end{cases}$，……………………7 分

$\because t_1+t_2<0, t_1\cdot t_2>0, \therefore t_1<0, t_2<0$，

所以 $|MA|+|MB|=|t_1|+|t_2|=-(t_1+t_2)=5\sqrt{2}$，$|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=4$，

所以 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$．………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)<4\Rightarrow|x+1|+|x-2|<4$，

化为 $\begin{cases}x<-1\\ 2x>-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\le x\le 2\\ 3<4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2\\ 2x-1<4\end{cases}$，…………………………………3 分

解得 $-\dfrac{3}{2}<x<-1$ 或 $-1\le x\le 2$ 或 $2<x<\dfrac{5}{2}$，

$\therefore -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{2}$．即不等式 $f(x)<4$ 的解集为 $(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$．……………………5 分

（2）根据题意，得 m^2-2m+4 的取值范围是 $f(x)$ 值域的子集.

$m^2-2m+4=(m-1)^2+3\ge 3$，

又由于 $f(x)=|x+1|+|x-2a|\ge|2a+1|$，$\therefore f(x)$ 的值域为 $[|2a+1|,+\infty)$，

……………………………………8 分

故 $|2a+1|\le 3$，$\therefore -2\le a\le 1$．即实数 a 的取值范围为 $[-2,1]$．……………10 分

注：以上各题其他正确解法相应得分