

9. 把函数 $f(x) = \sin^2 x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象. 则 $g(x)$ 的解析式是

- A. $g(x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ B. $g(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)$
 C. $g(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ D. $g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增. 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围是

- A. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $[1, 2]$
 C. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ D. $(0, 2]$

11. 已知抛物线 $C: x^2 = 8y$, 过点 $M(x_0, y_0)$ 作直线 MA, MB 与抛物线 C 分别切于点 A, B , 且以 AB 为直径的圆过点 M , 则 y_0 的值为

- A. -1 B. -2
 C. -4 D. 不能确定

12. 点 M 在曲线 $G: y = 3\ln x$ 上, 过 M 作 x 轴垂线 l , 设 l 与曲线 $y = \frac{1}{x}$ 交于点 N , 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{3}$,

且 P 点的纵坐标为 0, 则称 M 点为曲线 G 上的“水平黄金点”, 则曲线 G 上的“水平黄金点”的个数为

- A. 0 B. 1
 C. 2 D. 3

弥 封 线 内 不 要 答 题

太原市2020年高三年级模拟试题(三)

数学试卷(理科)

第II卷(非选择题 共90分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第13题~第21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x & (0 < x \leq 1) \\ x^2 - 1 & (x > 1) \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{8}\right)\right) =$ _____.

14. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2)}{4}$, 则 $A =$ _____.

15. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 若双曲线上存在点 P , 使 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 且 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 则双曲线的离心率为 _____.

16. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 DD_1 的中点, F 是侧面 CDD_1C_1 上的动点, 且 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE , 记点 B_1 与点 F 的运动轨迹构成的平面为 α .

- ① $\exists F$, 使得 $B_1F \perp CD_1$;
- ② 直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正切值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$;
- ③ α 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$;
- ④ 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的各个侧面中, 与 α 所成的锐二面角相等的侧面共四个.

其中正确命题的序号是 _____ . (写出所有正确命题的序号)

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (本小题满分12分)

已知 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, a_n b_{n+1} + b_{n+1} = n b_n$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{1}{2^n b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分12分)

垃圾分类是对垃圾进行有效处置的一种科学管理方法. 为了了解居民对垃圾分类的知晓率和参与率, 引导居民积极行动, 科学地进行垃圾分类, 某小区随机抽取年龄在区间 $[25, 85]$ 上的50人进行调研, 统计出年龄频数分布及了解垃圾分类的人数如下表:

年龄	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75)	[75, 85]
频数	5	10	10	15	5	5
了解	4	5	8	12	2	1

(1) 填写下面 2×2 列联表, 并判断能否在犯错误的概率不超过0.01的前提下认为以65岁为分界点居民对了解垃圾分类的有关知识有差异;

	年龄低于65岁的人数	年龄不低于65岁的人数	合计
了解	$a =$	$c =$	
不了解	$b =$	$d =$	
合计			

(2) 若对年龄在 $[45, 55)$, $[25, 35)$ 的被调研人中各随机选取2人进行深入调研, 记选中的4人中不了解垃圾分类的人数为 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

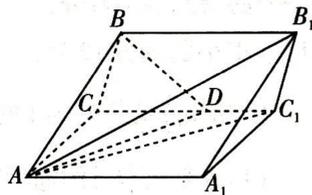
参考公式和数据: $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

题 答 要 不 内 线 封 弥

19. (本小题满分12分)

如图,在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,已知四边形 AA_1C_1C 为矩形, $AA_1 = 6, AB = AC = 4, \angle BAC = \angle BAA_1 = 60^\circ, \angle A_1AC$ 的角平分线 AD 交 CC_1 于 D .



- (1) 求证:平面 $BAD \perp$ 平面 AA_1C_1C ;
- (2) 求二面角 $A - B_1C_1 - A_1$ 的余弦值.

20. (本小题满分12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为2,且过点 $(1, \frac{3}{2})$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 已知 $\triangle BMN$ 是椭圆 C 的内接三角形,若坐标原点 O 为 $\triangle BMN$ 的重心,求点 O 到直线 MN 距离的最小值.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 (a \in R)$.

- (1) 讨论函数极值点的个数;
- (2) 若 $g(x) = f(x) - x$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 试判断 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 \cdot x_2$ 的大小关系,并说明理由.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分10分)【选修4-4: 坐标系与参数方程】

已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho - 6 \cos \theta = 0$, 以极点为坐标原点, 极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系, 直线 l 过点 $M(0, 2)$, 倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$.

- (1) 求曲线 C 的直角坐标方程与直线 l 的参数方程;
- (2) 设直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的值.

23. (本小题满分10分)【选修4-5: 不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |x + 1| + |x - 2a|$.

- (1) 若 $a = 1$, 解不等式 $f(x) < 4$;
- (2) 对任意的实数 m , 若总存在实数 x , 使得 $m^2 - 2m + 4 = f(x)$, 求实数 a 的取值范围.