2020年高考全国乙卷数学（理）试卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

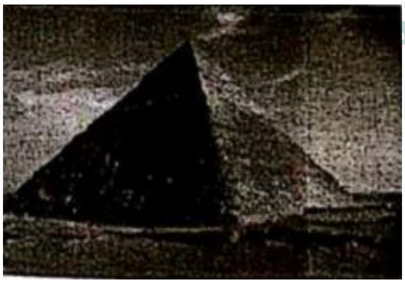
1.若 $z=1+i$，则 $|z^2-2z|=$（ ）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2.设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4\le 0\}$，$B=\{x\,|\,2x+a\le 0\}$，且 $A\cap B=\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$，则 $a=$（ ）

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 2

3.埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥。以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（ ）

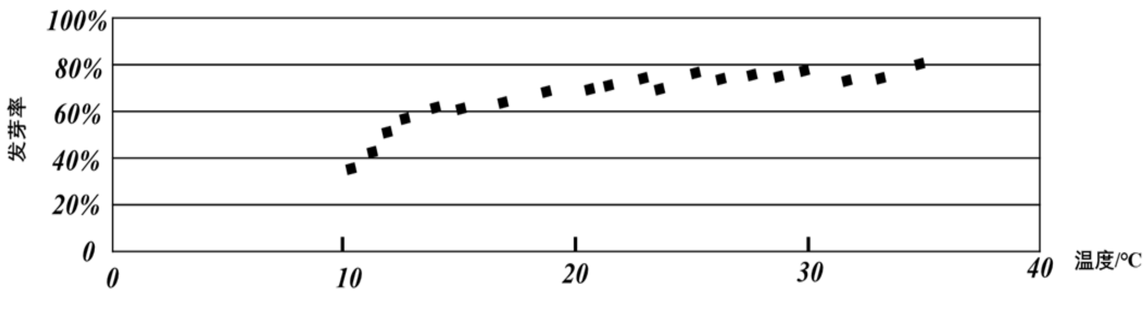


A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

4.已知 A 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上的一点，点 A 到 C 的焦点的距离为12，到 y 轴的距离为9，则 $p=$（ ）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

5.某校一个课外学习小组为研究某作物种子发芽率 y 和温度 x（单位：℃）的关系，在20个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$ 得到下面的散点图：



由此散点图，在10℃至40℃之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率y和温度x的回归方程类型的是（）

A. $y=a+bx$　B. $y=a+bx^2$　C. $y=a+be^x$　D. $y=a+b\ln x$

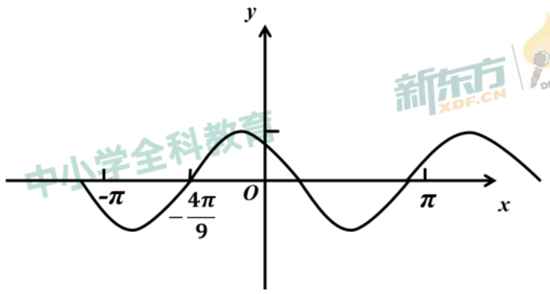
6.函数$f(x)=x^4-2x^3$的图像在点$(1,\ f(1))$处的切线方程为（）

A. $y=-2x-1$　　B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$　　D. $y=2x+1$

7.设函数$f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$在$[-\pi,\pi]$的图像大致如下图，则$f(x)$的最小正周期为（）

A. $\frac{10\pi}{9}$　B. $\frac{7\pi}{6}$　C. $\frac{4\pi}{3}$　D. $\frac{3\pi}{2}$



8. $(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中x^3y^3的系数为（）

A. 5　B. 10　C. 15　D. 20

9.已知$\alpha\in(0,\ \pi)$，且$3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，则$\sin\alpha=$（）

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

10.已知A，B，C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（）

A．64π　B.48π　C.36π　D.32π

11.已知$\odot M$：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线l：$2x+y+2=0$，P为l上的动点，过点P作$\odot M$的切线PA，PB，切点为A，B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为（）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

12.若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则（ ）

$A.a>2b$　　$B.a<2b$　　$C.a>b^2$　　$D.a<b^2$

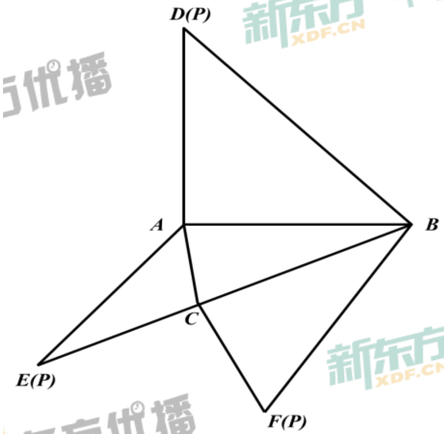
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\le 0,\\ x-y-1\ge 0,\\ y+1\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x+7y$ 的最大值为.

14.设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$.

15.已知 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，A 为 C 的右顶点，B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴.若 AB 的斜率为3，则 C 的离心率为.

16.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AC=1$，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE=30^\circ$，则 $\cos\angle FCB=$.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）

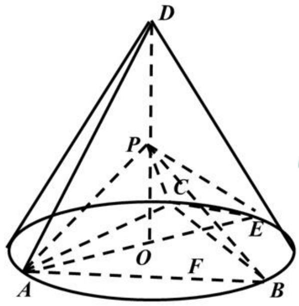
设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列，a_1 为 a_2，a_3 的等差中项.

（1）求 $\{a_n\}$ 的公比；

（2）若 $a_1=1$，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

18.（12 分）

如图，D为圆锥的顶点， O为圆锥底面的圆心，AE为底面直径，$AE=AD$，$\triangle ABC$是底面的内接正三角形，P为DO上一点，$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}=DO$.



（1）证明：$PA\perp$平面PBC；

（2）求二面角$B-PC-E$的余弦值.

19.(12 分)

甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛,约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰：比赛前抽签决定首先比赛的两人,另一人轮空：每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛,负者下一场轮空,直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后,剩余的两人继续比赛,直至其中一人被淘汰,另一人最终获胜,比赛结束.

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空.设每场比赛双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$.

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率.

20.（12 分）

已知A,B分别为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点，$G$为$E$的上顶点，$\overline{AG}\cdot\overline{GB}=8$，$P$为直线$x=6$上的动点，$PA$与$E$的另一交点为$C$，$PB$与$E$的另一交点为$D$.

（1）求E的方程；

（2）证明：直线CD过定点.

21.（12 分）

已知函数$f(x)=e^x+ax^2-x$

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x\geq 0$时，$f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$，求a的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos^k t, \\ y=\sin^k t \end{cases}$ (t为参数).以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.

（1）当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

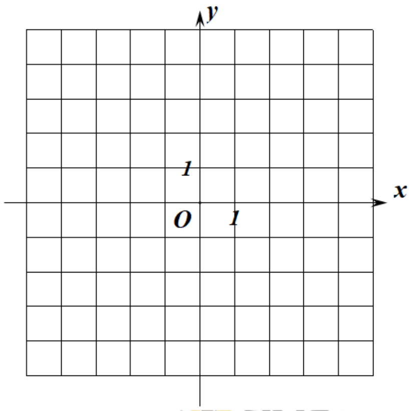
（2）当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

23.[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$

(1)画出 $y=f(x)$ 的图像；

(2)求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.



2020年高考全国乙卷数学（理）答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	B	C	C	D	B
题号	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	A	A	D	B

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 1

14. $\sqrt{3}$

15. 2

16. $-\frac{1}{4}$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60分。

17.（12分）

（1）$q=-2$

（2）$S_n=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}(3n+1)(-2)^n$

18.（12分）

（1）设 $AE=2$，由题可知，$AE=AD$，且 $AD=DE$

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形

$\therefore OD=AD\cdot\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore OP=\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because OA=\frac{1}{2}AE=1$

$\therefore AP=\sqrt{OP^2+OA^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

同理可得 $BP=AP=\frac{\sqrt{6}}{2}$

由正弦定理可得 $AB=2R\cdot\sin C=\sqrt{3}$

$\therefore AP^2+BP^2=AB^2$

$\therefore AP\perp BP\cdots\cdots①$

由圆锥性质可知：$OD\perp$ 面ABC

$\therefore BC\perp OD$

且圆 O 为正$\triangle ABC$的外接圆

$\therefore BC\perp OA$

$OA\cap OD=O$

$\therefore BC\perp$ 面OAD

$\because AP\subset$ 面OAD

$\therefore BC\perp AP\cdots\cdots②$

由①②可得：$AP\perp$ 面PBC

（2）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19.(12 分)

(1) $\frac{1}{16}$；　(2) $\frac{3}{4}$；　(3) $\frac{7}{16}$

20.（12 分）

（1）$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

（2）设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),P(6,y_0),A(-3,0),B(3,0)$

则 $l_{PA}:y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$

联立方程 $\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{9}(x+3) \\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow C(\dfrac{27-3{y_0}^2}{9+{y_0}^2},\dfrac{6y_0}{9+{y_0}^2})$

$l_{PB}:y=\dfrac{y_0}{3}(x-3)$

联立方程 $\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{3}(x\text{-}3) \\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow D(\dfrac{3{y_0}^2-3}{{y_0}^2+1},\dfrac{-2y_0}{{y_0}^2+1})$

根据椭圆对称性知，CD 的定点在 x 轴上，设定点为 Q，则 $Q(m,0)$

①当 CD 斜率存在时

则 $k_{QC}=k_{QD}\Rightarrow \dfrac{\dfrac{6y_0}{9+{y_0}^2}}{\dfrac{27-3{y_0}^2}{9+{y_0}^2}-m}=\dfrac{\dfrac{-2y_0}{{y_0}^2+1}}{\dfrac{3{y_0}^2-3}{{y_0}^2+1}-m}$

$\Rightarrow 4my_0^2-6y_0^2+12m-18=0$

即 $2y_0^2(2m-3)+6(2m-3)=0$

整理上式得：$(2m-3)(2y_0^2+6)=0$，又 $2y_0^2+6>0$

得 $(2m-3)=0\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$

即 CD 过定点 $Q(\dfrac{3}{2},0)$

②当 CD 斜率不存在时

由 C、D 坐标易知其 y 坐标互为相反数

即$-\dfrac{6y_0}{9+y_0^{\ 2}}=\dfrac{-2y_0}{y_0^{\ 2}+1}\Rightarrow y_0^{\ 2}=3$

将$y_0^{\ 2}=3$代入C、D的x坐标知

$C(\dfrac{27-3y_0^{\ 2}}{9+y_0^{\ 2}},\dfrac{6y_0}{9+y_0^{\ 2}})=C(\dfrac{3}{2},\dfrac{6y_0}{9+y_0^{\ 2}})$

$D(\dfrac{3y_0^{\ 2}-3}{y_0^{\ 2}+1},\dfrac{-2y_0}{y_0^{\ 2}+1})=D(\dfrac{3}{2},\dfrac{-2y_0}{y_0^{\ 2}+1})$

即CD过$Q(\dfrac{3}{2},0)$

综上，CD过定点$(\dfrac{3}{2},0)$

21.（12 分）

（1）当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)$单调递减

当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$单调递增

（2）$a\in\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

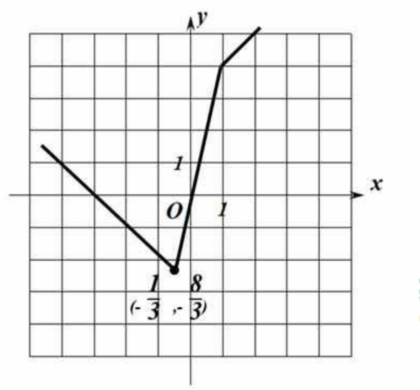
22.[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

（1）C_1是以（0，0）为圆心，1 为半径的圆；

（2）交点坐标$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$

23.[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

（1）



（2）$(-\infty,-\frac{7}{6})$