2020 年高考全国乙卷数学（理）逐题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若 $z=1+i$, 则 $\left|z^2-2z\right|=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】D

【解析】

$\because z=1+i$

$\therefore z^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$

$\because z^2-2z=2i-2(1+i)=2i-2-2i=-2$

$\therefore \left|z^2-2z\right|=|-2|=2$

2.设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4\le 0\}$， $B=\{x\,|\,2x+a\le 0\}$，且 $A\cap B=\{x\,|-2\le x\le 1\}$，则 $a=$ ( )

A. –4　　B. −2　　C. 2　　D. 2

【答案】B

【解析】

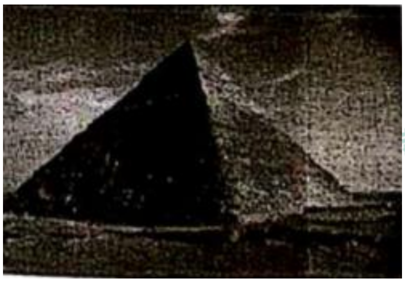
$A=\{x\,|\,x^2-4\le 0\}=\{x\,|\,x^2\le 4\}=\{x\,|-2\le x\le 2\}$

$B=\{x\,|\,2x+a\le 0\}=\left\{x\,|\,x\le -\frac{a}{2}\right\}$

$\because A\cap B=\{x\,|-2\le x\le 1\}$

$\therefore -\frac{a}{2}=1,\ \ a=-2$

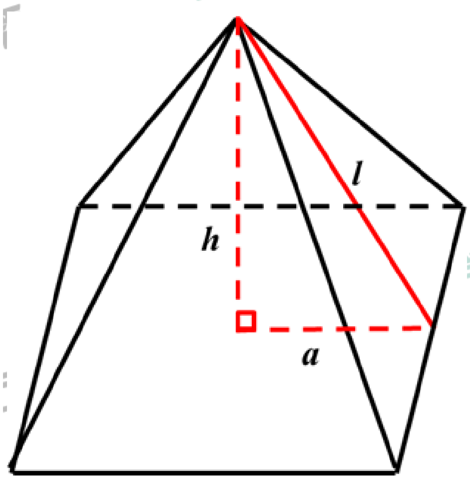
3.埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥。以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为 ( )



A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【解析】



设底面边长为$2a$， 底面高为h， 侧高为l

$\therefore h^2=l^2-a^2=\dfrac{2al}{2},\therefore l^2-al-a^2=0,\therefore l=\dfrac{a\pm\sqrt{5}a}{2}$

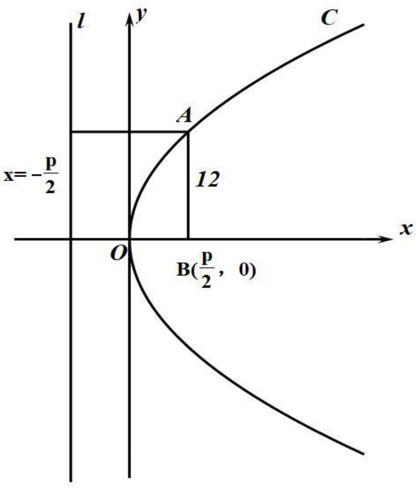
$\because l>0,\therefore l=\dfrac{a+\sqrt{5}a}{2},\therefore\dfrac{l}{2a}=\dfrac{\dfrac{a+\sqrt{5}a}{2}}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

4.已知A为抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上的一点，点A到C的焦点的距离为12，到y轴的距离为9，则$p=$（ ）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

【答案】C

【解析】



$B(\frac{p}{2},0)$

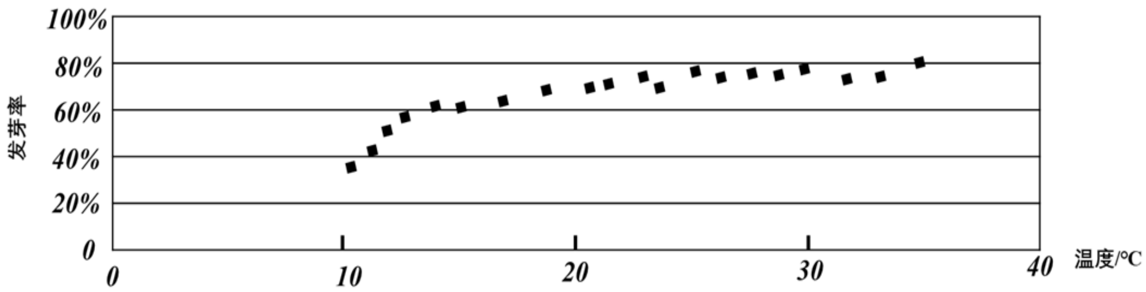
抛物线上的点到抛物线准线的距离与到焦点的距离相等

如图，准线$l:x=-\frac{p}{2}$

A 到 l 的距离为12

则$\left|-\frac{p}{2}\right|=3$， $p=6$

5.某校一个课外学习小组为研究某作物种子发芽率y和温度x（单位：℃）的关系，在20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$得到下面的散点图：



由此散点图，在10℃至40℃之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率y和温度x的回归方程类型的是（）

A. $y=a+bx$ B. $y=a+bx^2$ C. $y=a+be^x$ D. $y=a+b\ln x$

【答案】D

【解析】

观察散点图可得，图像拟合结果应符合对数函数图像的特征，故选：D

6.函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程为（ ）

A. $y=-2x-1$　　B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$　　D. $y=2x+1$

【答案】B

【解析】

把 $x=1$ 代入得 $f(1)=-1$，故图像经过 $(1,-1)$

又 $f'(x)=4x^3-6x^2$，$\therefore f'(1)=-2$

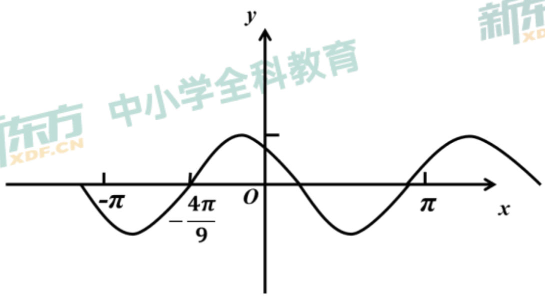
$\therefore$ 图像在 $(1,-1)$ 处切线的斜率为 $k=-2$

$\therefore$ 切线方程为 $y-(-1)=-2(x-1)$，即 $y=-2x+1$；

故选：B

7.设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为（ ）

A. $\frac{10\pi}{9}$　　B. $\frac{7\pi}{6}$　　C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$



【答案】C

【解析】

观察图像可知，$f(-\frac{4\pi}{9})=\cos(-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6})=0.$

则有 $-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$. 由题意可知，$k=-1$, 即 $-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$. 解得：$\omega=\frac{3}{2}$.

$\therefore T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{4\pi}{3}$.

故选：C

8. $(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中x^3y^3的系数为（ ）

A. 5　　B. 10　　C. 15　　D. 20

【答案】C

【解析】

因为题中所求为x^3y^3的系数，可将第一个括号展开为x和$\frac{y^2}{x}$分别与$(x+y)^5$相乘，对于$x\cdot(x+y)^5$项，$(x+y)^5$需提供x^2y^3项，对于$\frac{y^2}{x}\cdot(x+y)^5$项，$(x+y)^5$需提供$x^4y$项。所以$x^3y^3$由$x\cdot C_5^3x^2y^3$和$\frac{y^2}{x}\cdot C_5^1x^4y$两部分构成，其系数$=C_5^3+C_5^1=10+5=15.$

故选：C

9.已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，则$\sin\alpha=$（ ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【解析】

由三角函数的二倍角公式得：

$3\cos2\alpha-8\cos\alpha=3(2\cos^2\alpha-1)-8\cos\alpha=6\cos^2\alpha-8\cos\alpha-3=5.$

即$6\cos^2\alpha-8\cos\alpha-8=0.$

令$\cos\alpha=x$代入上式得$6x^2-8x-8=0$，

解得$x_1=2$(舍)，$x_2=-\frac{2}{3}$；

又$\because\alpha\in(0,\pi)$

$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

故选：A

10.已知A，B，C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（ ）

A．64π　　B.48π　　C.36π　　D.32π

【答案】A

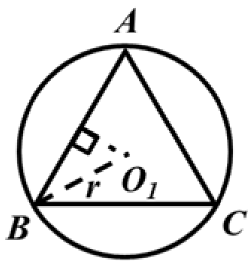
【解析】

$\because \odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，

$\therefore \odot O_1$ 为球 O 的一个截面，

$\because S_{\odot O_1}=4\pi=\pi r^2$，

$\therefore r=2$.

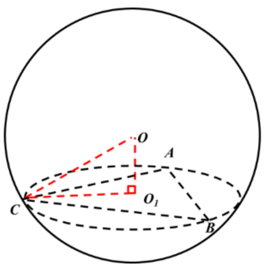


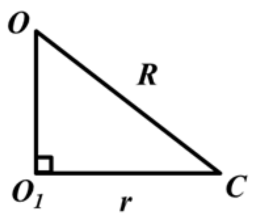
$\because AB=BC=AC=OO_1$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB=\sqrt{3}r=2\sqrt{3}$，

$\therefore OO_1=2\sqrt{3}$





在 $Rt\triangle OO_1C$ 中，可得 $R=\sqrt{r^2+OO_1{}^2}=4$，

$\therefore S_{\odot O}=4\pi R^2=64\pi$

故选：A

11.已知 $\odot M$：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l：$2x+y+2=0$，P 为 l 上的动点，过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA，PB，切点为 A，B，当 $|PM|\cdot|AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为（）

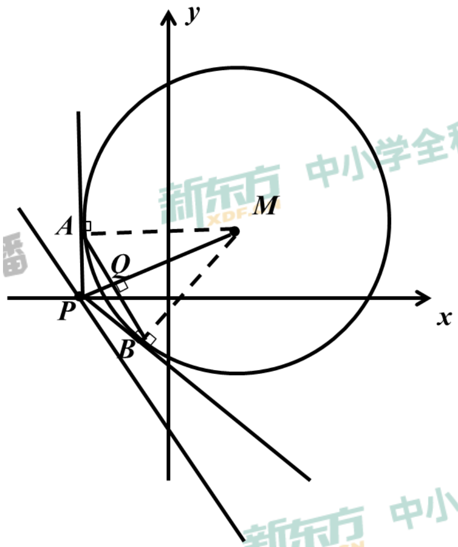
A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$　　　　D. $2x+y+1=0$

【答案】D

【解析】

如图



由题知 $M(1,1)$，$r=2$，若$|PM|\cdot|AB|$最小时，则$|PM|$最短时.

得 $PM\perp l$，l_{AB}与l平行

不妨设l_{AB}：$2x+y+b=0$，AB与PM交于点Q.

$|PM|=\sqrt{5}$，由 $AM=2$，$\therefore PA=1$.

故 $PA\cdot AM=PM\cdot AQ$，故$|AQ|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore|QM|=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

$\therefore\dfrac{|2+1+b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，故$b=1$或$b=-7$（舍）

故选：D

12.若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$, 则（ ）

$A.a>2b$　　$B.a<2b$　　$C.a>b^2$　　$D.a<b^2$

【答案】B

【解析】

$\because 2^{a}+\log_2 a=4^{b}+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b$，

$2^{2b}+\log_2 b=2^{2b}+\log_2 2b-1$，

即 $2^{a}+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 2b-1$

$\therefore 2^{a}+\log_2 a<2^{2b}+\log_2 2b$，

设 $f(x)=2^{x}+\log_2 x$

$\because f(x)=2^{x}+\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore a<2b$

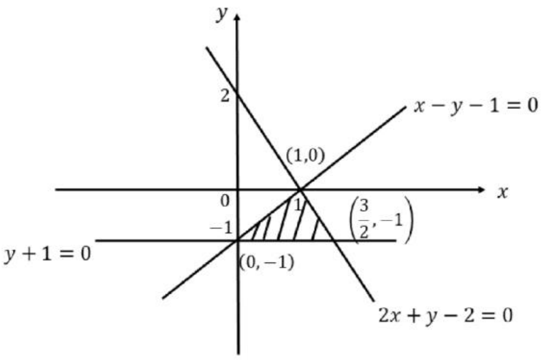
故选 B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\le 0,\\ x-y-1\ge 0,\\ y+1\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x+7y$ 的最大值为.

【答案】1

【解析】



由 $z=x+7y$，

$\therefore l: y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}z$，

$\therefore z_{\max}$ 为直线 l 截距最大值时的取值，

如图所示，当 l 图像过 $(1,0)$ 时，截距最大，

$\therefore (1,0)$ 代入 $z=x+7y$，$z_{\max}=1$

14.设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

$\because |\vec{a}+\vec{b}|=1$，

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})^2=1$，

即$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\vec{b}=1$，

$2\vec{a}\vec{b}=-1$，

$\vec{a}\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，

$(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}=3$，

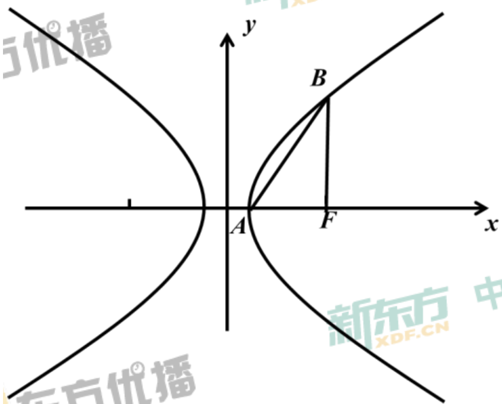
$\therefore|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$

15.已知F为双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，$A$为$C$的右顶点，$B$为$C$上的点，且$BF$垂直于$x$轴.若$AB$的斜率为$3$,则$C$的离心率为.

【答案】2

【解析】

如图

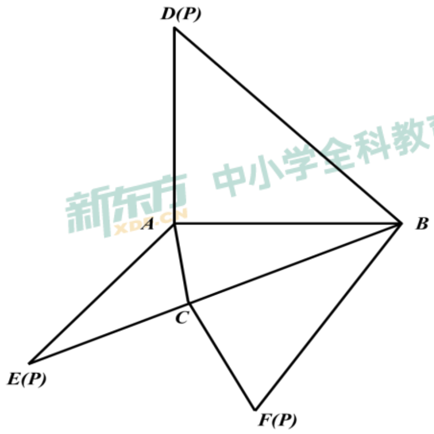


$A(a,0)$，$F(c,0)$，$\tan\angle BAF=3$，$x_B=c$，代入求B点坐标，则$\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得$\dfrac{c^2-a^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}$，

因此$b^4=a^2y^2$，解得$y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，取$y_B=\dfrac{b^2}{a}$，则$B(c,\dfrac{b^2}{a})$．又$\because k_{AB}=3$，$\therefore\dfrac{b^2}{a(c-a)}=3$，即

$\dfrac{c^2-a^2}{a(c-a)}=\dfrac{(c-a)(c+a)}{a(c-a)}=3$，因此$\dfrac{a+c}{a}=3$，解得$e=\dfrac{c}{a}=2$

16.如图，在三棱锥$P-ABC$的平面展开图中，$AC=1$，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE=30^\circ$，则$\cos\angle FCB=$.



【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】

$\because AB\perp AC, AC=1, AB=\sqrt{3}$，$\therefore BC=2$，

$\because AB\perp AD, AB=AD=\sqrt{3}$，$\therefore BD=\sqrt{6}$.

由题意得：

$AE=AD=\sqrt{3}$，$BF=BD=\sqrt{6}$

$\therefore$在$\triangle ACE$中，$\cos\angle CAE=\dfrac{1+3-EC^2}{2\times1\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$EC=1$，$\therefore FC=EC=1$，

$\therefore$在$\triangle BCF$中，$\cos\angle FCB=\dfrac{1+4-6}{2\times1\times2}=-\dfrac{1}{4}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）

设$\{a_n\}$是公比不为 1 的等比数列，a_1为a_2，a_3的等差中项.

（1）求$\{a_n\}$的公比；

（2）若$a_1=1$，求数列$\{na_n\}$的前n项和.

【答案】（1）$q=-2$

（2）$S_n=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}(3n+1)(-2)^n$

【解析】

（1）设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq 1)$,

由a_1为a_2,a_3的等差中项

得到$2a_1=a_2+a_3$即$2a_1=a_1q+a_1q^2$

由$a_1\neq 0$得$q^2+q-2=0$

即$(q-1)(q+2)=0$解得$q=1$或$q=-2$

由题知$q\neq 1$，所以$q=-2$

（2）若$a_1=1$，则$a_n=(-2)^{n-1}$

数列$\{na_n\}$的通项公式为$n(-2)^{n-1}$

前n项和$S_n=1\times(-2)^0+2\times(-2)^1+3\times(-2)^2+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$ ①

$-2S_n=1\times(-2)^1+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$ ②

①-②得，$3S_n=(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n$

$$3S_n=\frac{1\times[1-(-2)^n]}{1-(-2)}-n\times(-2)^n$$

$$3S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$$

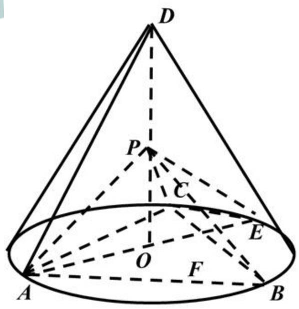
$$S_n=\frac{1-(-2)^n}{9}-\frac{n\times(-2)^n}{3}$$

$$S_n=\frac{1-(-2)^n-3n\times(-2)^n}{9}=\frac{1-(3n+1)(-2)^n}{9}$$

$$S_n=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}(3n+1)(-2)^n$$

18.（12 分）

如图，D为圆锥的顶点，　O为圆锥底面的圆心，AE为底面直



径，$AE=AD$，$\triangle ABC$是底面的内接正三角形，P为DO上一点，$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}=DO$.

（1）证明：$PA\perp$平面PBC；

（2）求二面角$B-PC-E$的余弦值.

【答案】（1）略

（2）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】

（1）设$AE=2$，由题可知，$AE=AD$，且$AD=DE$

$\therefore\triangle ADE$是等边三角形

$\therefore OD=AD\cdot\cos 30^{\circ}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore OP=\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because OA=\frac{1}{2}AE=1$

$\therefore AP=\sqrt{OP^2+OA^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

同理可得$BP=AP=\frac{\sqrt{6}}{2}$

由正弦定理可得$AB=2R\cdot\sin C=\sqrt{3}$

$\therefore AP^2+BP^2=AB^2$

$\therefore AP\perp BP\cdots\cdots$①

由圆锥性质可知：$OD\perp$面ABC

$\therefore BC\perp OD$

且圆O为正$\triangle ABC$的外接圆

$\therefore BC\perp OA$

$OA \cap OD = O$

$\therefore BC \perp$ 面OAD

$\because AP \subset$ 面OAD

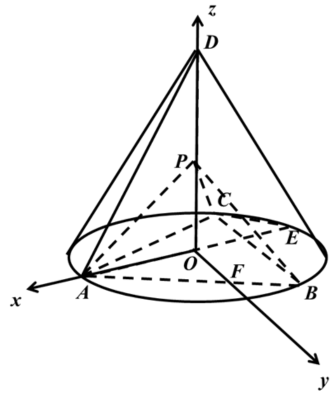
$\therefore BC \perp AP \cdots\cdots②$

由①②可得： $AP \perp$ 面PBC

（2）以O为坐标原点，做$OF \perp AE$， OF 所在直线为y轴

以OA所在直线为x轴

以OD所在直线为z轴



$\therefore P\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), E(-1,0,0), A(1,0,0), B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right), C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$

由（1）可得：面BPC的一个法向量为$\overrightarrow{PA}=\left(1,0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

$\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$；

设面PEC的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\\-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$$

令$x=\sqrt{3}$， 则$\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,-\sqrt{6}\right)$

由图可知：二面角为锐角

$$\cos\langle B-PC-E\rangle=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PA}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

19.(12 分)

甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛,约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰：比赛前抽签决定首先比赛的两人,另一人轮空：每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛,负者下一场轮空,直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后,剩余的两人继续比赛,直至其中一人被淘汰,另一人最终获胜,比赛结束.

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空.设每场比赛双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$.

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率.

【答案】(1) $\frac{1}{16}$；　　(2) $\frac{3}{4}$；　　(3) $\frac{7}{16}$

【解析】(1) 设事件A为“甲连胜四场”，则$P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(2) 设事件B为“进行四场比赛结束”，即有一人没有输过. 此时，B_1为“甲连胜4场”B_2为“乙连胜4场”，B_3为“丙连胜3场”，所以

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{1}{4}$$

即需要进行第五场比赛的概率为$P(\bar{B})=1-P(B)=\frac{3}{4}$

(3) 由(2)知，当4场比赛结束时，丙获胜的概率为$P(B_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{1}{8}$，现考虑5场结束.

方法一：设事件C为“共进行5场比赛，甲最终获胜”，则事件C_1为“胜胜胜负胜”；事件C_2为“胜负空胜胜”；事件C_3为“胜胜负空胜”；事件C_4为“负空胜胜胜”. 则

$$P(C)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)+P(C_4)=\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 3=\frac{7}{32}$$

同理，共进行5场比赛，乙最终获胜的概率为$\frac{7}{32}$，

故丙最终获胜的概率为：

$p=1-2P(C)-P(B_1)-P(B_2)=1-\frac{7}{32}\times 2-\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{7}{16}$

方法二：考虑丙胜的情况，设事件D为“共进行5场比赛，丙最终获胜”，则事件D_1为“空负空胜胜”；事件D_2为“空胜负空胜”；事件D_3为“空胜胜负胜”，则

$P(D)=P(D_1)+P(D_2)+P(D_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$

故丙最终获胜的概率为：$P=P(D)+P(B_3)=\frac{5}{16}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{7}{16}$

20.（12 分）

已知A,B分别为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点，$G$为$E$的上顶点，$\overline{AG}\cdot\overline{GB}=8$，$P$为直线$x=6$上的动点，$PA$与$E$的另一交点为$C$，$PB$与$E$的另一交点为$D$.

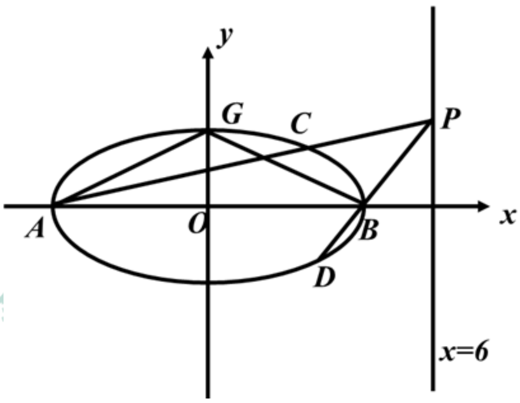
（1）求E的方程；

（2）证明：直线CD过定点.

【答案】（1）$\frac{x^2}{9}+y^2=1$

（2）略

【解析】



（1）$\because \overline{AG}\cdot\overline{GB}=8$

$\therefore \left|\overline{AG}\right|\left|\overline{GB}\right|\cdot\cos\angle AGB=-8$

$\therefore (a^2+1)(2\cos^2\angle AGO-1)=-8$

$\therefore (a^2+1)(2\cdot\frac{1}{a^2+1}-1)=-8$

化简得$2-(a^2+1)=-8$

由上式得$a^2=9$

即E的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

（2）设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),P(6,y_0),A(-3,0),B(3,0)$

则 $l_{PA}: y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$

联立方程 $\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{9}(x+3) \\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow C(\dfrac{27-3y_0{}^2}{9+y_0{}^2},\dfrac{6y_0}{9+y_0{}^2})$

$l_{PB}: y=\dfrac{y_0}{3}(x-3)$

联立方程 $\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{3}(x\text{-}3) \\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow D(\dfrac{3y_0{}^2-3}{y_0{}^2+1},\dfrac{-2y_0}{y_0{}^2+1})$

根据椭圆对称性知，CD 的定点在 x 轴上，设定点为 Q，则 $Q(m,0)$

①当 CD 斜率存在时

则 $k_{QC}=k_{QD} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{6y_0}{9+y_0{}^2}}{\dfrac{27-3y_0{}^2}{9+y_0{}^2}-m}=\dfrac{\dfrac{-2y_0}{y_0{}^2+1}}{\dfrac{3y_0{}^2-3}{y_0{}^2+1}-m}$

$\Rightarrow 4my_0^2-6y_0^2+12m-18=0$

即 $2y_0^2(2m-3)+6(2m-3)=0$

整理上式得：$(2m-3)(2y_0^2+6)=0$，又 $2y_0^2+6>0$

得 $(2m-3)=0 \Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$

即 CD 过定点 $Q(\dfrac{3}{2},0)$

②当 CD 斜率不存在时

由 C、D 坐标易知其 y 坐标互为相反数

即-$\dfrac{6y_0}{9+y_0{}^2}=\dfrac{\text{-}2y_0}{y_0{}^2+1} \Rightarrow y_0{}^2=3$

将 $y_0{}^2=3$ 代入 C、D 的 x 坐标知

$C(\frac{27-3{y_0}^2}{9+{y_0}^2},\frac{6y_0}{9+{y_0}^2})$=$C(\frac{3}{2},\frac{6y_0}{9+{y_0}^2})$

$D(\frac{3{y_0}^2-3}{{y_0}^2+1},\frac{-2y_0}{{y_0}^2+1})$=$D(\frac{3}{2},\frac{-2y_0}{{y_0}^2+1})$

即 CD 过 $Q(\frac{3}{2},0)$

综上，CD 过定点 $(\frac{3}{2},0)$

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge\frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围.

【答案】（1）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增

（2）$a\in\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

【解析】（1）解：$f(x)=e^x+ax^2-x$

当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x^2-x$

$\therefore f'(x)=e^x+2x-1$

即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增

又 $\because f'(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$ $f(x)$ 单调递减

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ $f(x)$ 单调递增

（2）$\because f(x)\ge\frac{1}{2}x^3+1$

得 $e^x+ax^2-x\ge\frac{1}{2}x^3+1$

当 $x=0$ 时，显然成立

当$x>0$时，$\Rightarrow a\geq\dfrac{-e^x+x+\frac{1}{2}x^3+1}{x^2}$

令$g(x)=\dfrac{-e^x+x+\frac{1}{2}x^3+1}{x^2}\ (x>0)$

$\therefore g'(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+2x-2e^x+2)}{2x^3}$

令$h(x)=x^2+2x-2e^x+2\ (x>0)$

$h'(x)=2x+2-2e^x=-2(e^x-x-1)$

易证当$x>0$时，$e^x>x-1\therefore h'(x)<0$

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减$\therefore h(x)<h(0)=0$

令$g'(x)=0\Rightarrow x=2$

当$0<x<2$时，$g'(x)>0$,当$x>2$时，$g'(x)<0$

$\therefore g(x)$在$(0,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减

$\therefore g(x)_{\max}=g(2)=\dfrac{7-e^2}{4}$

$\therefore a\geq\dfrac{7-e^2}{4}$

$\therefore a$的取值范围是$\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系xOy，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos^k t,\\ y=\sin^k t\end{cases}$($t$为参数).以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为$4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.

（1）当$k=1$时，C_1是什么曲线？

（2）当$k=4$时，求C_1与C_2的公共点的直角坐标.

【答案】（1）C_1是以（0，0）为圆心，1为半径的圆；

（2）交点坐标$(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

【解析】

（1）当$k=1$时，C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}$($t$为参数)

$\therefore C_1$普通方程为$x^2+y^2=1$

$\therefore C_1$是以（0，0）为圆心，1为半径的圆

（2）当$k=4$时，$C_1\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$（$t$为参数）

$\therefore C_1\begin{cases}\sqrt{x}=\cos^2 t\\ \sqrt{y}=\sin^2 t\end{cases}$（$t$为参数）

$\therefore C_1$普通方程为$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1(0\le x\le 1,0\le y\le 1)$

$C_2:4x-16y+3=0$

C_1与C_2联立$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ 4x-16y+3=0\end{cases}\Rightarrow 4x-16(1-\sqrt{x})^2+3=0$

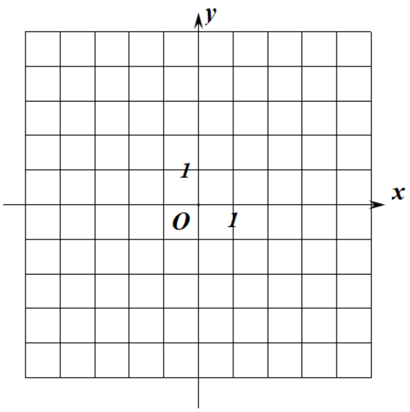
令$m=\sqrt{x}(0\le m\le 1)$ $-12x+32\sqrt{x}-13=0$即$m^2-\frac{8}{3}m+\frac{13}{12}=0\Rightarrow(m-\frac{1}{2})(m-\frac{13}{6})=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$或$m=\frac{13}{6}$（舍）

即$\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$

$\therefore$交点坐标$(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

23.[选修4—5：不等式选讲]（10分）

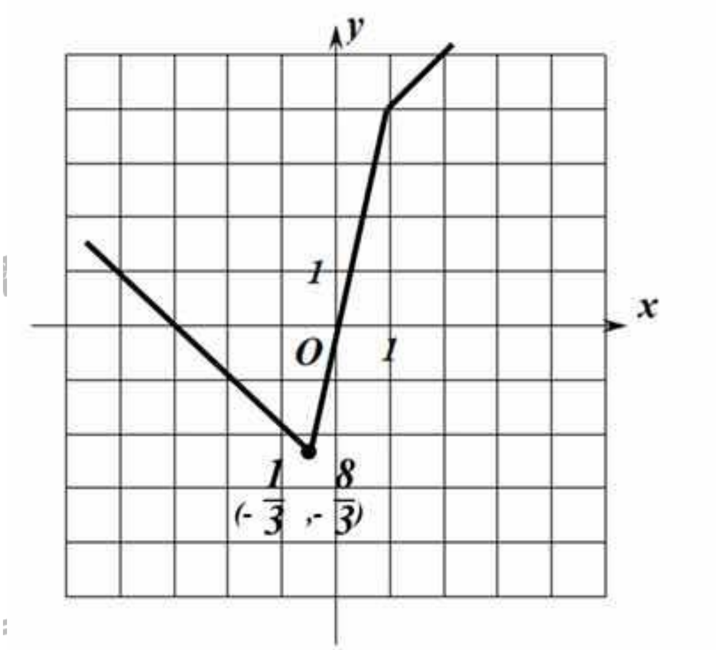


已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$

(1)画出 $y=f(x)$ 的图像；

(2)求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.

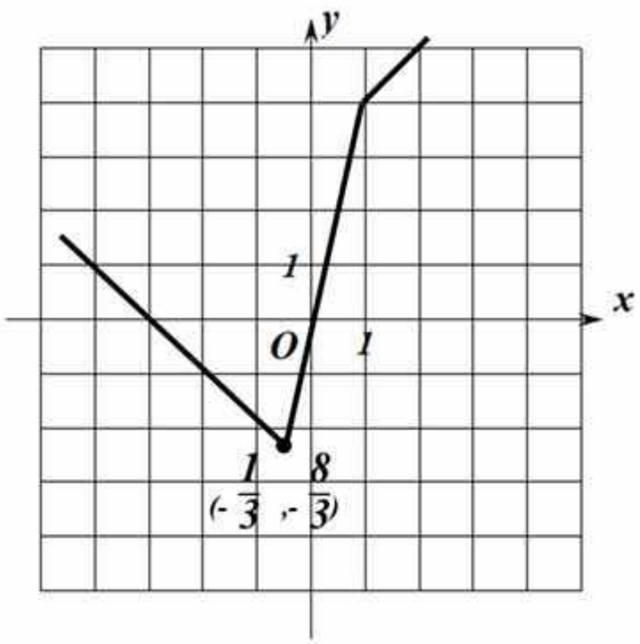
【答案】（1）



（2）$(-\infty,-\dfrac{7}{6})$

【解析】

（1） $f(x+1)=\begin{cases}-x-4, x\le -\dfrac{4}{3} \\ 5x+4, -\dfrac{4}{3}<x<0 \\ x+4, x\ge 0\end{cases}$

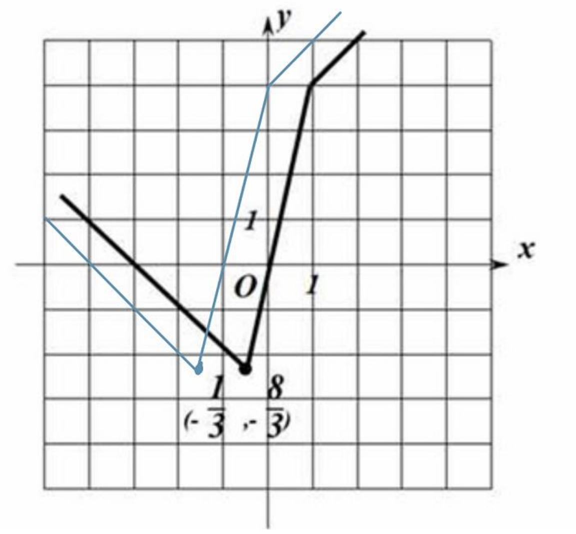


（2）由题意可得，

$$f(x)=|3x+1|-2|x-1|=\begin{cases}-x-3,x\le-\dfrac{1}{3}\\5x-1,-\dfrac{1}{3}<x<1\\x+3,x\ge1\end{cases}$$

$f(x)$ 向左平移 1 单位得到 $f(x+1)$

$$f(x+1)=\begin{cases}-x-4,x\le-\dfrac{4}{3}\\5x+4,-\dfrac{4}{3}<x<0\\x+4,x\ge0\end{cases}$$



由图像可知，

当 $x \le -\frac{4}{3}, f(x) > f(x+1)$

当 $-\frac{4}{3} \le x \le 0$，令 $5x+4=-x-3$, 解得 $x=-\frac{7}{6}$

$-\frac{4}{3} \le x \le -\frac{7}{6}$, $f(x) > f(x+1)$

$-\frac{7}{6} \le x \le 0, f(x) < f(x+1)$

当 $x > 0, f(x) < f(x+1)$

综上所述

$\therefore$ 不等式解集为 $(-\infty,-\frac{7}{6})$