



# 2020 年普通高等学校招生全国统一考试

## (全国 I 卷)

### 文科数学

#### 注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题 (本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$ ,  $B = \{x | -4, 1, 3, 5\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{-4, 1\}$                       B.  $\{1, 5\}$                       C.  $\{3, 5\}$                       D.  $\{1, 3\}$

【答案】D

【解析】 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\} = \{x | -1 < x < 4\}$ , 则  $A \cap B = \{1, 3\}$ . 故答案选 D

2. 若  $z = 1 + 2i + i^3$ , 则  $|z| =$

- A. 0                                  B. 1                                  C.  $\sqrt{2}$                               D. 2

【答案】C

【解析】 $z = 1 + 2i + i^3 = 1 + 2i - i = 1 + i$ , 则  $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ . 故答案选 C

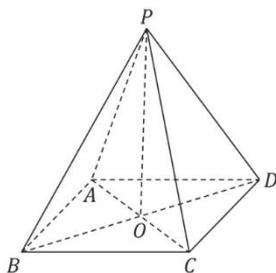
3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥, 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为

- A.  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$                       D.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C



【解析】如图  $PO \perp ABCD$ ，设  $PO=h$ ， $OD=a$ ，取  $CD$  的中点为  $M$



易得  $PM = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$ ， $\therefore h^2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$ ， $\therefore 4h^4 - a^2h^2 - a^4 = 0$ ， $4\frac{h^4}{a^4} - 2\frac{h^2}{a^2} - 1 = 0$

高与边长之比为  $\frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}}{\sqrt{2}a} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{h^2}{a^2}}$

令  $\frac{h^2}{a^2} = t$ ， $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ， $\therefore \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 。故答案选 C

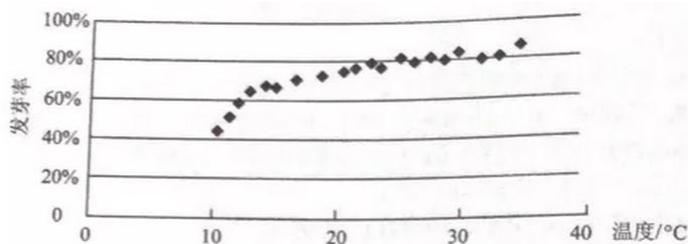
4. 设  $O$  为正方形  $ABCD$  的中心，在  $O, A, B, C, D$  中任取 3 点，则取到的 3 点共线的概率为

- A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】在 5 点中任取 3 点，一共有 10 种情况。其中，只有所取点为  $A, O, C$  和  $B, O, D$  时，符合题意，则概率为  $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ 。故答案选 A

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率  $y$  和温度  $x$  (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$  得到下面得散点图:



由此散点图，在  $10^{\circ}\text{C}$  至  $40^{\circ}\text{C}$  之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率  $y$  和温度  $x$  的回归方程类型的是

- A.  $y = a + bx$                       B.  $y = a + bx^2$                       C.  $y = a + be^x$                       D.  $y = a + b \ln x$



【答案】D

【解析】由图像性质可得，选D

6. 已知圆  $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ，过点  $(1, 2)$  的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为

A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

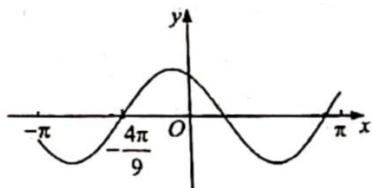
【答案】B

【解析】当圆心与  $(1, 2)$  的连线与所给直线垂直时，弦的长度取得最小值

此时圆心到点  $(1, 2)$  的距离为  $\sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$ ，则弦长  $= 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

故答案选 B

7. 设函数  $f(x) = \cos\left(wx + \frac{\pi}{6}\right)$  在  $[-\pi, \pi]$  的图像大致如下图，则  $f(x)$  的最小正周期为



A.  $\frac{10\pi}{9}$                       B.  $\frac{7\pi}{6}$                       C.  $\frac{4\pi}{3}$                       D.  $\frac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】 $\because f\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{9}w + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ， $\therefore -\frac{4\pi}{9}w + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $w = -\frac{3}{4}(1+3k)$

$\therefore T = \frac{2\pi}{w} = \frac{-8\pi}{3+9k}$ ， $\therefore k = -1$ ， $T = \frac{4\pi}{3}$ 。故答案选 C

8. 设  $a \log_3 4 = 2$ ，则  $4^{-a} =$

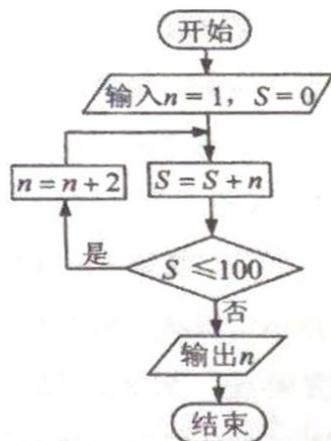
A.  $\frac{1}{16}$                       B.  $\frac{1}{9}$                       C.  $\frac{1}{8}$                       D.  $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】由题  $a = \frac{2}{\log_3 4} = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$ ，则  $4^{-a} = 4^{-\log_2 3} = 4^{\log_4 \frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$ 。故答案选 B



9. 执行右面得程序框图，则输出的  $n =$



- A. 17                      B. 19                      C. 21                      D. 23

【答案】C

【解析】

第一次循环后:  $S=1, n=3$ ;  
 第二次循环后:  $S=1+3, n=5$ ;  
 第三次循环后:  $S=1+3+5, n=7$ ;

L

由  $1+3+5+L+(2m-1) \leq 100$  得  $m \leq 10$ ,

当  $m=10$  时,  $S=100$ ;

当  $m=11$  时,  $S > 100$ ;

$\therefore n = 2 \times 11 - 1 = 21$

10. 设  $\{a_n\}$  是等比数列, 且  $a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_2 + a_3 + a_4 = 2$ , 则  $a_6 + a_7 + a_8 =$

- A. 12                      B. 24                      C. 30                      D. 32

【答案】D

【解析】  $\frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3} = q = 2, \therefore a_6 + a_7 + a_8 = (a_2 + a_3 + a_4)q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$ , 故选 D

11. 设  $F_1, F_2$  是双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的两个焦点,  $O$  为坐标原点, 点  $P$  在  $C$  上且  $|OP|=2$ ,

则  $\triangle PF_1F_2$  的面积为

- A.  $\frac{7}{2}$                       B. 3                      C.  $\frac{5}{2}$                       D. 2

【答案】B



【解析】  $c^2 = 1 + 3 = 4$ ,  $\therefore c = 2$ ,  $Q|OP| = 2$ ,  $\therefore \angle F_1PF_2 = 90^\circ$

令  $PF_1 = r_1$ ,  $PF_2 = r_2$ ,  $\therefore r_1^2 + r_2^2 = 16$ ,  $r_1 - r_2 = 2$ ,

$\therefore (r_1 - r_2)^2 + 2r_1r_2 = 16$ , 即  $r_1r_2 = 6$ ,  $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}r_1r_2 = 3$ , 故选 B.

12. 已知  $A, B, C$  为球  $O$  的球面上的三个点,  $e O_1$  为  $\triangle ABC$  的外接圆, 若  $e O_1$  的面积为  $4\pi$ ,

$AB = BC = AC = OO_1$ , 则球  $O$  的表面积为

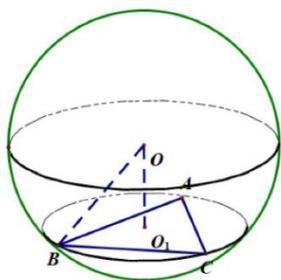
- A.  $64\pi$                       B.  $48\pi$                       C.  $36\pi$                       D.  $32\pi$

【答案】 A

【解析】 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $r_1$ , 由  $\pi r_1^2 = 4\pi$ , 得  $r_1 = 2$ ;

$\triangle ABC$  中由正弦定理  $2r_1 = \frac{AB}{\sin 60^\circ}$ ,  $\therefore AB = 2\sqrt{3}$ ,  $\therefore BO_1 = 2$ ,  $OO_1 = 2\sqrt{3}$

$\therefore OB = R = \sqrt{12 + 4} = 4$ ,  $\therefore S = 4\pi R^2 = 64\pi$ , 故选 A



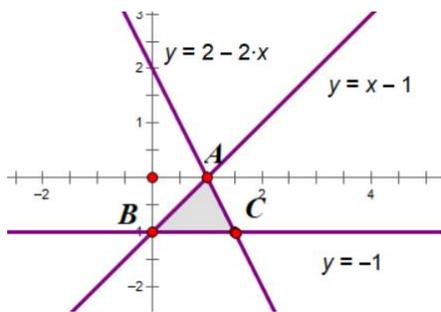
二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0 \\ x - y - 1 \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x + 7y$  的最大值为 \_\_\_\_\_

【答案】 1

【解析】 由  $z = x + 7y$  得到  $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}z$ , 平移  $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}z$  可以得知  $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}z$  经过

$A(1, 0)$  得到  $z = x + 7y$  的最大值为 1.





14. 设向量  $\vec{a} = (1, -1)$ ,  $\vec{b} = (m+1, 2m-4)$ , 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_

【答案】 5

【解析】 因为  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 所以  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 所以  $m+1-2m+4=0$ , 所以  $m=5$

15. 曲线  $y = \ln x + x + 1$  的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为 \_\_\_\_\_

【答案】  $y = 2x$

【解析】  $y' = \frac{1}{x} + 1$ , 设切点为  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{1}{x_0} + 1 = 2$ , 所以  $x_0 = 1$ , 所以切点为  $(1, 2)$ , 所以切线

方程为  $y - 2 = 2(x - 1)$ , 即  $y = 2x$ 。

16. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} + (-1)^n a_n = 3n - 1$ , 前 16 项和为 540, 则  $a_1 =$  \_\_\_\_\_

【答案】 7

【解析】 当  $n$  为偶数时,  $a_{n+2} + a_n = 3n - 1$ , 所以

$$S_{\text{偶}} = (a_2 + a_4) + (a_6 + a_8) + (a_{10} + a_{12}) + (a_{14} + a_{16}) \\ = (3 \times 2 - 1) + (3 \times 6 - 1) + (3 \times 10 - 1) + (3 \times 14 - 1) = 92$$

当  $n$  为奇数时,  $a_{n+2} - a_n = 3n - 1$ , 所以  $a_{n+2} - a_n = 3n - 1$ , 所以

$$a_3 - a_1 = 3 \times 1 - 1, \quad a_5 - a_3 = 3 \times 3 - 1, \quad \dots \quad a_n - a_{n-2} = 3(n-2) - 1$$

累加得  $a_n - a_1 = 3[1 + 3 + \dots + (n-2)] - \frac{n-1}{2}$ , 所以  $a_n = a_1 + 3 \times \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{n-1}{2}$

所以

$$S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15} = 8a_1 + \frac{3}{4}(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 14^2) - \frac{1}{2}(3 + 5 + 7 + \dots + 15) + \frac{7}{2} \\ = 8a_1 + \frac{3}{4} \times 4 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2) - \frac{1}{2}(3 + 5 + 7 + \dots + 15) + \frac{7}{2} = 8a_1 + 3 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - \frac{63}{2} + \frac{7}{2} \\ = 8a_1 + 420 - 28 = 8a_1 + 392$$

所以  $S_{\text{偶}} + S_{\text{奇}} = 92 + 8a_1 + 392 = 540$ , 所以  $a_1 = 7$

(提示:  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ )

三、解答题 (共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。)

(一) 必考题: 共 60 分。



17. (12分)

某厂接受了一项加工业务,加工出来的产品(单位:件)按标准分为A, B, C, D四个等级.加工业务约定:对于A级品、B级品、C级品,厂家每件分别收取加工费90元,50元,20元;对于D级品,厂家每件要赔偿原料损失费50元,该厂有甲、乙两个分厂可承接加工业务,甲分厂加工成本费为25元/件,乙分厂加工成本费为20元/件.厂家为决定由哪个分厂承接加工业务,在两个分厂各试加工了100件这种产品,并统计了这些产品的等级,整理如下:

甲分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	40	20	20	20

乙分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	28	17	34	21

- (1) 分别估计甲、乙两分厂加工出来的一件产品为A级品的概率;  
 (2) 分别求甲、乙两分厂加工出来的100件产品的平均利润,以平均利润为依据,厂家应选哪个分厂承接加工业务?

【答案】(1) 甲:  $\frac{2}{5}$ , 乙:  $\frac{7}{25}$ ; (2) 甲承接

【解析】

(1) 甲分厂加工出来的一件产品为A级品的概率是  $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ ;

乙分厂加工出来的一件产品为A级品的概率是  $\frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

(2) 甲:  $\frac{(90-25) \times 40 + (50-25) \times 20 + (20-25) \times 20 + (-25-50) \times 20}{100} = \frac{1500}{100} = 15$

乙:  $\frac{(90-20) \times 28 + (50-20) \times 17 + (20-20) \times 34 + (-70) \times 21}{100} = 10$

$Q 15 > 10$ , 故选甲厂

18. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c. 已知  $B = 150^\circ$ .

(1) 若  $a = \sqrt{3}c$ ,  $b = 2\sqrt{7}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积;

(2) 若  $\sin A + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 求C.

【答案】(1)  $\sqrt{3}$ ; (2)  $C = \frac{\pi}{12}$

【解析】

(1)  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ , 即  $28 = 3c^2 + c^2 - 2\sqrt{3}c^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , 解得  $c = 2$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{3}$$

$$(2) \sin A = \sin(B+C), \text{ 则 } \sin\left(\frac{5}{6}\pi + C\right) + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

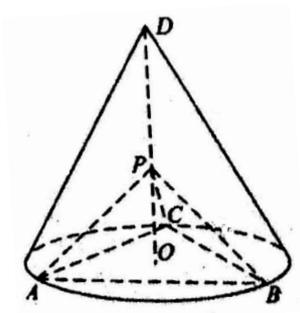
$$\text{化简得 } \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{12}$$

19. (12分)

如图,  $D$  为圆锥的顶点,  $O$  是圆锥底面的圆心,  $\triangle ABC$  是底面的内接正三角形,  $P$  为  $DO$  上一点,  $\angle APC = 90^\circ$

(1) 证明: 平面  $PAB \perp$  平面  $PAC$ ;

(2) 设  $DO = \sqrt{2}$ , 圆锥的侧面积为  $\sqrt{3}\pi$ , 求三棱锥  $P-ABC$ .



【答案】(1) 略; (2)  $\frac{\sqrt{6}}{8}$

【解析】

$$(1) \left. \begin{array}{l} AB \perp PO \\ AB \perp CO \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp \text{面 } PCO \Rightarrow AB \perp PC$$

$$\text{又 } \angle APC = 90^\circ, \text{ 故 } \left. \begin{array}{l} AB \perp PC \\ PA \perp PC \end{array} \right\} \Rightarrow PC \perp \text{面 } PAB$$

又  $PC \subset \text{面 } PAC$ ,  $\therefore \text{面 } PAC \perp \text{面 } PAB$

(2) 设圆锥的半径为  $r$ , 母线长为  $l$ ,

$$\text{Q } S_{\text{侧}} = \pi rl = \sqrt{3}\pi, \text{ 得 } rl = \sqrt{3} \text{ ①}$$

$$\text{又 Q } DO^2 = l^2 - r^2 = 2 \text{ ②}$$

$$\text{则 } r = 1, l = \sqrt{3}$$

在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理知,  $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2r = 2$ , 则  $AC = \sqrt{3}$

$$\text{又 Q } PC = PA, \angle APC = 90^\circ, \therefore PA = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



在  $Rt\triangle PAO$  中,  $PO^2 = PA^2 - OA^2 = \frac{1}{2}$ , 则  $PO = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot PO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

20. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x - a(x+2)$ .

(1) 当  $a=1$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

【答案】(1) 见解析; (2)  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

【解析】

(1) 当  $a=1$  时,  $f(x) = e^x - (x+2)$ ,  $f'(x) = e^x - 1$

当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$

则函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增

(2)  $f'(x) = e^x - a$

① 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$  恒成立

则  $f(x)$  在  $R$  上单调递增, 不合题意

② 当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$  解得  $x = \ln a$

当  $x < \ln a$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > \ln a$  时,  $f'(x) > 0$

则  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  单调递增,

$$f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a(\ln a + 2)$$

根据题意,  $f(\ln a) < 0$ , 即  $a - a(\ln a + 2) < 0$ , 解得  $a > \frac{1}{e}$

综上, 实数  $a$  的取值范围是  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

21. (12分)

已知  $A, B$  分别为椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的左、右顶点,  $G$  为  $E$  的上顶点,  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$ .

$P$  为直线  $x=6$  上的动点,  $PA$  与  $E$  的另一交点为  $C$ ,  $PB$  与  $E$  的另一交点为  $D$ .

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 证明: 直线  $CD$  过定点.



【答案】(1)  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ; (2) 见解析

【解析】

(1) 已知  $A(-a,0)$ ,  $B(a,0)$ ,  $G(0,1)$ ,

则  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = (a,1) \cdot (a,-1) = a^2 - 1 = 8$ , 解得  $a = 3$ ,  $a = -3$  (舍去)

则椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

(2)  $B(3,0)$ , 设  $P$  点坐标为  $(6, y_0)$

① 当  $y_0 \neq 1$  时, 直线  $BP$  的方程为  $y = \frac{y_0}{3}(x-3)$

$$\begin{cases} y = \frac{y_0}{3}(x-3) \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 联立解得 } (1+y_0^2)x^2 - 6y_0^2x + 9y_0^2 - 9 = 0$$

由韦达定理:  $3 + x_D = \frac{6y_0^2}{1+y_0^2}$ , 解得  $x_D = \frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2}$ , 则  $y_D = \frac{-2y_0}{1+y_0^2}$ , 即  $D\left(\frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2}, \frac{-2y_0}{1+y_0^2}\right)$

同理,  $A(-3,0)$ ,  $P(6, y_0)$ , 则直线  $AP$  的方程为  $y = \frac{y_0}{9}(x+3)$

$$\begin{cases} y = \frac{y_0}{9}(x+3) \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 联立解得 } (9+y_0^2)x^2 + 6y_0^2x + 9y_0^2 - 81 = 0$$

由韦达定理:  $x_A \cdot x_C = \frac{9y_0^2-81}{9+y_0^2} = -3 \cdot x_C$ , 解得  $x_C = \frac{27-3y_0^2}{9+y_0^2}$ , 则  $y_C = \frac{6y_0}{9+y_0^2}$

即  $C\left(\frac{27-3y_0^2}{9+y_0^2}, \frac{6y_0}{9+y_0^2}\right)$

由对称性可得,  $N$  点必在  $x$  轴上. 设定点  $N(n,0)$ , 则  $k_{NC} = k_{ND}$

$$k_{NC} = \frac{6y_0}{27-3y_0^2-n(9+y_0^2)}, \quad k_{ND} = \frac{\frac{-2y_0}{1+y_0^2}}{\frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2} - (3-n)y_0^2 - 3 - n}$$

令  $k_{NC} = k_{ND}$ , 解得  $n = \frac{3}{2}$ . 即直线  $CD$  过定点  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$



(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos^k t \\ y = \sin^k t \end{cases}$ , ( $t$  为参数), 以坐标原点为极点,

$x$  轴正半轴为极轴建立极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $4\rho \cos \theta - 16\rho \sin \theta + 3 = 0$ .

(1) 当  $k=1$  时,  $C_1$  是什么曲线?

(2) 当  $k=4$  时, 求  $C_1$  与  $C_2$  的公共点的直角坐标.

【答案】(1)  $C_1$  是以  $(0,0)$  为圆心, 半径为 1 的的圆; (2)  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

【解析】

(1) 当  $k=1$  时,  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$  ( $t$  为参数),

$\therefore C_1: x^2 + y^2 = 1$  是圆心为  $(0,0)$ , 半径为 1 的的圆

(2) 当  $k=4$  时,  $\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$  ( $t$  为参数),  $\therefore C_2: 4x - 16y + 3 = 0$

联立:  $4\cos^4 t - 16\sin^4 t + 3 = 0$ ,  $4\cos^4 t - 4\sin^4 t - 12\sin^4 t + 3 = 0$

$4\cos 2t - 12\left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 + 3 = -3\cos^2 2t + 10\cos 2t = 0$ , 则  $\cos 2t = 0$  或  $\cos 2t = \frac{10}{3}$  (舍)

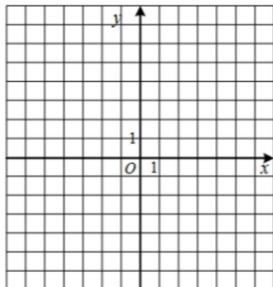
所以  $t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  或  $t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$  ( $k \in Z$ )

$\therefore$  交点坐标为  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

23. 【选修 4-5: 不等式选讲】(10 分)

已知函数  $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$ .

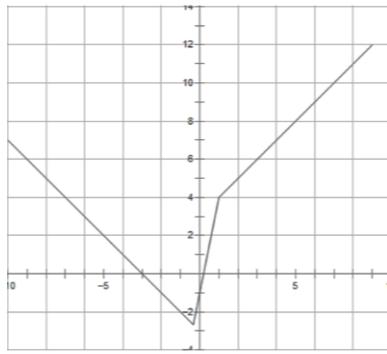
(1) 画出  $y = f(x)$  的图像;





(2) 求不等式  $f(x) > f(x+1)$  的解集.

【答案】(1)



; (2)  $\left\{x \mid x < -\frac{7}{6}\right\}$

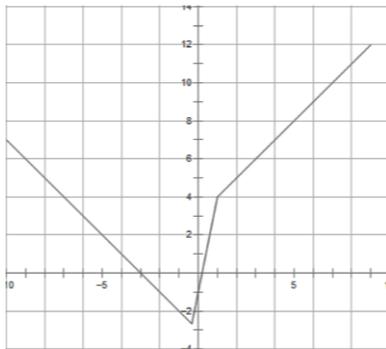
【解析】

(1) 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = x + 3$

当  $-\frac{1}{3} < x < 1$  时,  $f(x) = 5x - 1$

当  $x \leq -\frac{1}{3}$  时,  $f(x) = -x - 3$

所以  $y = f(x)$  的图像如图所示:



(2) 由图像平移可知, 当  $x \leq -\frac{1}{3}$  时,  $|3x+1| - 2|x-1| > |3(x+1)+1| - 2|(x+1)-1|$

化简得  $|3x+4| < -3x-3$ , 则  $3x+3 < 3x+4 < -3x-3$ ,  $\therefore x < -\frac{7}{6}$

所以解集为  $\left\{x \mid x < -\frac{7}{6}\right\}$