2020年普通高等学校招生全国统一考试

（全国 I 卷）

理科数学

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1.若 $z=1+i$，$\left|z^2-2z\right|=$

A.0　　B.1　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

【答案】D

【解析】$z^2-2z=z(z-2)=(i+1)(i-1)=i^2-1=-2$

2.设集合 $A=\left\{x\middle|x^2-4\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|2x+a\le 0\right\}$ 且 $A\cap B=\left\{x\middle|-2\le x\le 1\right\}$，则 $a=$

A.-4　　B.-2　　C.2　　D.4

【答案】B

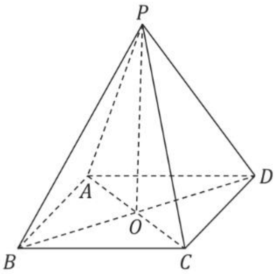
【解析】$A=\left\{x\middle|-2\le x\le 2\right\}$，$B=\left\{x\middle|x\le -\frac{a}{2}\right\}$，$\therefore -\frac{a}{2}=1, a=-2$

3.埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【解析】如图 $PO\perp ABCD$，设 $PO=h$， $OD=a$，取 CD 的中点为 M



易得 $PM=\sqrt{\frac{a^2}{2}+h^2}$， $\therefore h^2=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{\frac{a^2}{2}+h^2}$

$\therefore 4h^4-a^2h^2-a^4=0$， $4\frac{h^4}{a^4}-2\frac{h^2}{a^2}-1=0$

高与边长之比为 $\frac{\sqrt{\frac{a^2}{2}+h^2}}{\sqrt{2}a}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{h^2}{a^2}}$

令 $\frac{h^2}{a^2}=t$， $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$， $\therefore\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{4}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

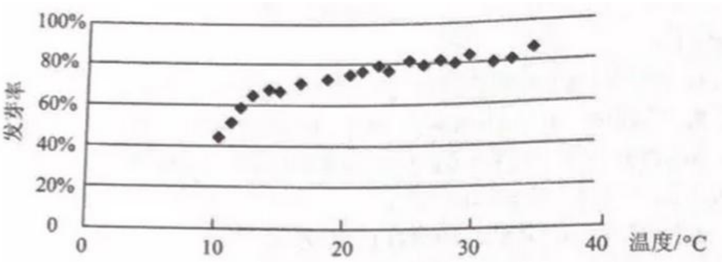
4.已知 A 为抛物线 C: $y^2=2px\left(p>0\right)$ 上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到轴的距离为 9，则 $p=$

A.2　　B.3　　C.6　　D.9

【答案】C

【解析】$12-9=\frac{p}{2}$， $\therefore p=6$

5.某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x（单位：$^{\circ}C$）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $\left(x_i,y_i\right)\left(i=1,2,\cdots,20\right)$ 得到下面得散点图：



由此散点图，在 $10^{\circ}C$ 至 $40^{\circ}C$ 之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是

A. $y=a+bx$　　B. $y=a+bx^2$　　C. $y=a+be^x$　　D. $y=a+b\ln x$

【答案】D

【解析】由图像性质可得，选 D

6.函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

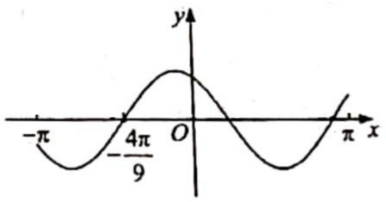
A. $y=-2x-1$　　B. $y=-2x+1$　　C. $y=2x-3$　　D. $y=2x+1$

【答案】B

【解析】Q $f(1)=1-2=-1,\ f'(x)=4x^3-6x^2$

$\therefore f'(1)=4-6=-2, y+1=-2(x-1), y=-2x+1$

7.设函数 $f(x)=\cos\left(wx+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为



A. $\dfrac{10\pi}{9}$　　B. $\dfrac{7\pi}{6}$　　C. $\dfrac{4\pi}{3}$　　D. $\dfrac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】Q $f\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)=\cos\left(-\dfrac{4\pi}{9}w+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，$\therefore -\dfrac{4\pi}{9}w+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, w=-\dfrac{3}{4}(1+3k)$

$\therefore T=\dfrac{2\pi}{w}=\dfrac{-8\pi}{3+9k}$，$\therefore k=-1, T=\dfrac{4\pi}{3}$

8. $\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为

A.5　　B.10　　C.15　　D.20

【答案】C

【解析】由题意易得：x^3y^3 的系数为 $C_5^2+C_5^4=15$

9.已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，则 $\sin\alpha=$

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【解析】由二倍角公式，则$3\left(2\cos^2\alpha-1\right)-8\cos\alpha=5$，化简为$6\cos^2\alpha-8\cos\alpha-8=0$，即

$3\cos^2\alpha-4\cos\alpha-4=0$，

因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

故选 A

10.已知A，B，C为球O的球面上的三个点，e O_1为DABC的外接圆，若e O_1的面积为4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为

A. 64π　　　B. 48π　　　C. 36π　　　D. 32π

【答案】A

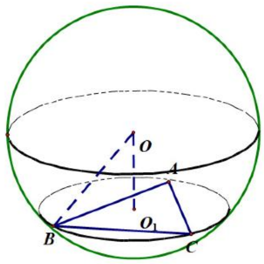
【解析】设DABC的外接圆半径为r_1，由$\pi r_1^2=4\pi$，得$r_1=2$；

DABC中由正弦定理$2r_1=\dfrac{AB}{\sin 60^{\circ}}$，∴ AB=$2\sqrt{3}$，∴ BO_1=2，OO_1=$2\sqrt{3}$

∴ OB= R=$\sqrt{12+4}=4$，

∴ S=$4\pi R^2=64\pi$

故选 A.



11.已知e $M:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线$l:2x+y+2=0$，P为l上的动点，过点P作e M的切线PA，PB，切点为A，B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为

A. $2x-y-1=0$　　　B. $2x+y-1=0$　　　C. $2x-y+1=0$　　　D. $2x+y+1=0$

【答案】D

【解析】e $M:(x-1)^2+(y-1)^2=4$，解得$r=2$，$S_{\text{四PAMB}}=r\cdot PA=\dfrac{1}{2}PM\cdot AB$，

化简得 $4\sqrt{PM^2-4}=PM\cdot AB$，∴ $AB=4\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{PM^2}}$

∴ $|PM|\cdot|AB|=4\cdot\sqrt{PM^2-4}$

当$PM\perp l$时最小，排除 A、C

此时ABPl，∴设直线AB的方程为$l_1:2x+y+C=0$

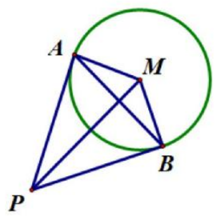
在 DAPM 中可解得平行直线之间的距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

由平行直线距离公式得 $d=\dfrac{|2-C|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，解得 $C=1$或$C=3$，

又∵直线 AB 与 e M 有两个交点，则圆心距 $d=\dfrac{|5+C|}{\sqrt{5}}<2$，∴ $C=1$

直线 AB 的方程为 $2x+y+1=0$

故选 D



12.若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则

A. $a>2b$　　B. $a<2b$　　C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

【答案】B

【解析】$2^a+\log_2 a=4^b+\log_2 b$；

当 $a=2b$ 时，$2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 2b=4^b+\log_2 b+1>4^b+\log_2 b$，∴ $a<2b$；

B 正确 A 错误；

令 $a=1$，$2=4^b+\log_2 b$，∴ $b<1$，排除 D；

令 $a=4$,16+2=18，$b=2$,16+1=17，17<18，∴ $b>2$，排除 C；

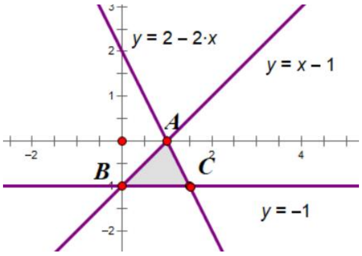
故选 B

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\le 0\\ x-y-1\ge 0\\ y+1\ge 0\end{cases}$，则 $z=x+7y$ 的最大值为______________.

【答案】1

【解析】由 $z=x+7y$ 得到 $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{1}{7}z$，平移 $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{1}{7}z$ 可以得知 $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{1}{7}z$ 经过 $A(1,0)$ 得到 $z=x+7y$ 的最大值为 1.



14.设 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$____________________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】因为 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$，所以 $\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，所以 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，所以

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$

15.已知 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，A 为 C 的右顶点，B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴，若 AB 的斜率为3，则 C 的离心率为______________

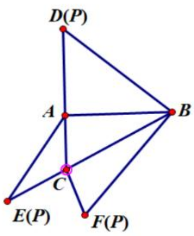
【答案】2

【解析】因为 $\tan\angle BAF=\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{c-a}=3$，所以 $b^2=3a(c-a)$，所以 $c^2-a^2=3a(c-a)$，所以 $2a^2-3ac+c^2=0$，所以 $(2a-c)(a-c)=0$，所以 $c=2a$ 或者 $c=a$（舍去）

所以 C 的离心率为 $e=2$。

16.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，

$AC=1, AB=AD=\sqrt{3},\ AB\perp AC, AB\perp AD, \angle CAE=30^0$ 则 $\cos\angle FCB=$____________



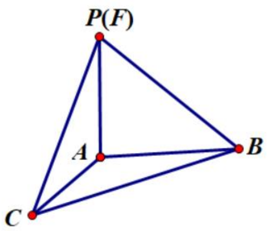
【答案】$-\dfrac{1}{4}$

【解析】还原三棱锥 $P-ABC$ 之后得到下图。

在 ΔPCA 中，$PC^2=1+3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$，所以 $PC=1$，在 ΔPBA 中，$PB=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$，

在$\triangle CBA$中，$BC=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

在$\triangle FCB$中，$\cos\angle FCB=\dfrac{1+4-6}{2\cdot 1\cdot 2}=-\dfrac{1}{4}$



三、解答题（共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。）

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

设$\{a_n\}$是公比不为 1 的等比数列，a_1为a_2,a_3的等差中项.

（1）求$\{a_n\}$的公比;

（2）$a_1=1$，求数列$\{na_n\}$的前 n 项和.

【答案】（1）$q=-2$；（2）$S_n=\dfrac{1}{9}-\dfrac{(-2)^n(1+3n)}{9}$

【解析】

（1）$\because 2a_1=a_2+a_3\ \therefore q^2+q-2=0$, 所以 $q=-2, q=1$（舍去）

（2）$\because a_1=1, \therefore a_n=(-2)^{n-1}, \therefore na_n=n\cdot(-2)^{n-1}$

设数列$\{na_n\}$的前 n 项和为S_n，则

$S_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n$，得

$S_n=1+2\cdot(-2)^1+3\cdot(-2)^2+\cdots+(n-1)(-2)^{n-2}+n\cdot(-2)^{n-1}$，两边乘公比$-2$，得

$-2S_n=(-2)+2\cdot(-2)^2+\cdots+(n-1)(-2)^{n-1}+n\cdot(-2)^n$

$\therefore 3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\cdot(-2)^n=1+\dfrac{-2\left[1-(-2)^{n-1}\right]}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^n$

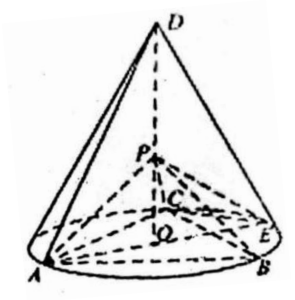
$\therefore S_n=\dfrac{1}{9}-\dfrac{(-2)^n(1+3n)}{9}$

18.（12 分）

如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，AE 为底面直径，$AE=AD$，$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DO$

(1)证明：$PA\perp$ 平面 PBC

(2)求二面角 $B-PC-E$ 余弦值.



【答案】（1）略;（2）$\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

【解析】

（1）连接 OB，设 $AE=2r$，则 $AD=2r$，$OA=OB=r$，$OD=\sqrt{3}r$

$\therefore PO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$，$PB=PA=\sqrt{\dfrac{1}{2}r^2+r^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}r$

$AB=\sqrt{3}r$，则 $PA^2+PB^2=AB^2$，$\therefore PA\perp PB$

同理，$PA\perp PC$

又 $PB\subset$ 平面 PBC，$PC\subset$ 平面 PBC，$PB\cup PC=P$，$PA\perp$ 平面 PBC

（2）取 AB 靠近 B 点的三等分点 M，

以 O 点为原点，OA，OM，OD 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴

$B\left(-\dfrac{1}{2}r,\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,0\right)$，$P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$，$C\left(-\dfrac{1}{2}r,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,0\right)$，$E(-r,0,0)$

设平面 BPC 和平面 PCE 的法向量分别为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\overrightarrow{BP}=\left(\dfrac{1}{2}r,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$，$\overrightarrow{EP}=\left(r,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(0,-\sqrt{3}r,0\right)$，$\overrightarrow{EC}=\left(\dfrac{1}{2}r,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,0\right)$

$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{2}x_1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_1=0\\-\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_2=0\\\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_2=0\end{cases}$

取 $\vec{n_1}=\left(\sqrt{2},0,-1\right)$，$\vec{n_2}=\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{2}\right)$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{\left|\sqrt{2}+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

19.（12 分）

甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下:累计负两场者被淘汰:比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空;每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束，经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空，设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$。

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率.

【答案】（1）$\frac{1}{16}$；（2）$\frac{3}{4}$；（3）$\frac{7}{16}$

【解析】

（1）甲连胜四场

第一场：甲胜，乙输

第二场：甲胜，丙输

第三场：甲胜，乙输

第四场：乙淘汰，甲、丙比赛，甲胜，比赛结束

故 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

（2）若需要进行 5 场比赛，说明第 4 场无法结束比赛，则可以先算出 4 场可结束的比赛的概率，借助正难则反的思想即可

4 场结束比赛的情况分类如下：

第一类：甲连胜四场 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

第二类：乙连胜四场 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

第三类：丙胜，$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{1}{8}$

故需要进行 5 场比赛的概率为 $P=1-\frac{1}{8}\times 2=\frac{3}{4}$

（3）丙最终获胜，需要进行的比赛场数为 4 场或者 5 场

若是 4 轮结束：概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{1}{8}$

若是 5 场结束，丙可能在第 2 场、第 3 场和第 4 场输

①若丙在第 2 场输，则$P_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$

②若丙在第 3 场输，则$P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$

③若丙在第 4 场输，则$P_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$

故丙最终获胜的概率$P=\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)\times 2=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}=\frac{7}{16}$

20.（12 分）

已知A，B分别为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点，$G$为$E$的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$.

P为直线$x=6$上的动点，PA与E的另一交点为C，PB与E的另一交点为D.

（1）求E的方程；

（2）证明：直线CD过定点.

【答案】（1）$\frac{x^2}{9}+y^2=1$；（2）见解析

【解析】

（1）已知$A(-a,0)$，$B(a,0)$，$G(0,1)$，

则$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=(a,1)\cdot(a,-1)=a^2-1=8$，解得$a=3$，$a=-3$（舍去）

则椭圆E的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$

（2）$B(3,0)$，设P点坐标为$(6,y_0)$

①当$y_0\neq 1$时，直线BP的方程为$y=\frac{y_0}{3}(x-3)$

$\begin{cases} y=\frac{y_0}{3}(x-3) \\ \frac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases}$，联立解得$\left(1+y_0^2\right)x^2-6y_0^2+9y_0^2-9=0$

由韦达定理：$3+x_D=\frac{6y_0^2}{1+y_0^2}$，解得$x_D=\frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2}$，则$y_D=\frac{-2y_0}{1+y_0^2}$，即$D\left(\frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2},\frac{-2y_0}{1+y_0^2}\right)$

同理，$A(-3,0)$，$P(6,y_0)$，则直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{9}(x+3)$

$\begin{cases} y=\frac{y_o}{9}(x+3) \\ \frac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases}$，联立解得 $(9+y_0^2)x^2+6y_0^2x+9y_0^2-81=0$

由韦达定理：$x_A\cdot x_C=\frac{9y_0^2-81}{9+y_0^2}=-3\cdot x_C$，解得 $x_C=\frac{27-3y_0^2}{9+y_0^2}$，则 $y_C=\frac{6y_0}{9+y_0^2}$

即 $C\left(\frac{27-3y_0^2}{9+y_0^2},\frac{6y_0}{9+y_0^2}\right)$

由对称性可得，N 点必在 x 轴上. 设定点 $N(n,0)$，则 $k_{NC}=k_{ND}$

$k_{NC}=\frac{6y_0}{27-3y_0^2-n(9+y_0^2)}$，$k_{ND}=\frac{\frac{-2y_0}{1+y_0^2}}{\frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2}}=\frac{-2y_0}{(3-n)y_0^2-3-n}$

令 $k_{NC}=k_{ND}$，解得 $n=\frac{3}{2}$. 即直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（1）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围.

【解析】

（1）当 $a=1$，$f(x)=e^x+x^2-x$，$f'(x)=e^x+2x-1$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 个

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$，即 $e^x+ax^2-x\geq\frac{1}{2}x^3+1$

①当 $x=0$ 时，显然成立

②当 $x>0$ 时，$a\geq\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$

令 $g(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}(x>0)$， $g'(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+2x-2e^x+2)}{2x^3}$

令 $h(x)=x^2+2x-2e^x+2(x>0)$， $h'(x)=2x+2-2e^x=-2(e^x-x-1)$

易证当 $x>0$ 时， $e^x>x+1$， $\therefore h'(x)<0$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减， $\therefore h(x)<h(0)=0$

令 $g'(x)=0$，解得 $x=2$ 时，

当 $0<x<2$ 时， $g'(x)>0$；当 $x>2$ 时， $g'(x)<0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 单调递减

$\therefore g(x)_{\max}=g(2)=\dfrac{7-e^2}{4}$， 则 $a\ge\dfrac{7-e^2}{4}$

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

22.【选修 4-4：坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t\\ y=\sin^k t\end{cases}$，($t$ 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.

(1) 当 $k=1$ 时， C_1 是什么曲线?

(2) 当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

【答案】(1) C_1 是以 $(0,0)$ 为圆心，半径为 1 的的圆；(2) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$

【解析】

(1) 当 $k=1$ 时， $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，($t$ 为参数)，

$\therefore C_1$： $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $(0,0)$，半径为 1 的的圆.

(2) 当 $k=4$ 时， $\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$，($t$ 为参数)， $\therefore C_2$： $4x-16y+3=0$

联立，得： $4\cos^4 t-16\sin^4 t+3=0$， $4\cos^4 t-4\sin^4 t-12\sin^4 t+3=0$

即 $4\cos 2t-12\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2+3=-3\cos^2 2t+10\cos 2t=0$，则 $\cos 2t=0$ 或 $\cos 2t=\frac{10}{3}$（舍）

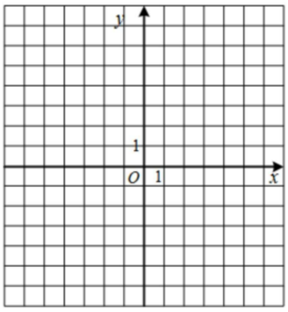
$\therefore t=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $t=\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in Z)$

$\therefore$ 交点坐标为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

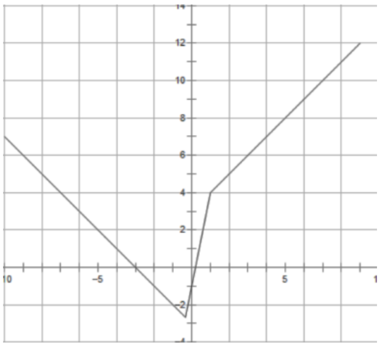
23.【选修 4-5：不等式选讲】（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

（1）画出 $y=f(x)$ 的图像；



（2）求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.

【答案】（1）

；（2）$\left\{x\middle|x<-\frac{7}{6}\right\}$.

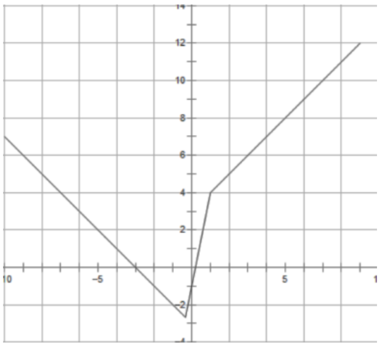
【解析】

（1）当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=x+3$

当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f(x)=5x-1$

当 $x\leq -\frac{1}{3}$ 时，$f(x)=-x-3$

所以 $y=f(x)$ 的图像如图所示，



（2）由图像平移可知，当 $x \le -\frac{1}{3}$ 时，$|3x+1|-2|x-1|>|3(x+1)+1|-2|(x+1)-1|$

化简得 $|3x+4|<-3x-3$，则 $3x+3<3x+4<-3x-3$，$\therefore x<-\frac{7}{6}$

解集为 $\left\{x \middle| x<-\frac{7}{6}\right\}$.